UBND XÃ ĐIỆN LƯ
PHÒNG VĂN HÓA-XÃ HỘI

KỲ THI CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN HỌC SINH GIỎI CÁC MÔN VĂN HÓA LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC: 2025-2026

Môn: Toán 9

Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

(Đề thi có 01 trang, gồm 10 câu).

Ngày 29 tháng 10 năm 2025

Bài 1. *(2,0 điểm)* Rút gọn biểu thức $P=\frac{x-4\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}+\frac{1-3\sqrt{x}+x}{x^2+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}$, với $x>0$.

Bài 2: *(2,0 điểm)* Cho $x, y>1$ thỏa mãn $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=\frac{5}{xy+4}$. Tính giá trị của biểu thức $A=x^3+y^3+9xy$.

Bài 3: *(2,0 điểm)* Giải phương trình $x^2+\sqrt{x+2025}=x+\sqrt{x^2+2025}$.

Bài 4: *(2,0 điểm)* Một xe container chở 1000 túi cam gồm ba loại, 200 túi Cam Cao Phong, 300 túi Cam sành và 500 túi cam giấy. Các túi cam có kích thước như nhau. Một người lấy ngẫu nhiên ba túi cam từ container này. Xác suất của biến cố "lấy được cả ba túi cùng một loại cam" là bao nhiêu?

Bài 5: *(2,0 điểm)* Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn điều kiện $m+n+1$ là ước nguyên tố của $4(m^2+mn+n^2)-3$. Chứng minh rằng: $4(m^2+mn+n^2)-3$ chia hết cho $m+n-1$

Bài 6: *(1,5 điểm)* Bà H gửi một số tiền vào quỹ tiết kiệm với lãi suất 1,2% một tháng. Sau 6 tháng bà nhận được tổng số tiền là 48.000.000 đồng. Hỏi lúc đầu bà H gửi bao nhiêu tiền.

Bài 7: *(1,5 điểm)* Người ta làm một cái hộp hình vuông để đựng được 5 cái bánh hình tròn có đường kính $6cm$, sao cho không có bất kì hai cái bánh nào được chồng lên nhau. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của cái hộp.

Bài 8: *(4,0 điểm)* Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Điểm A nằm bên ngoài đường tròn tâm O. Qua A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC; H là giao điểm của AO với BC. Lấy điểm E bất kỳ trên đường tròn (E khác B và C). Qua E vẽ tiếp tuyến với đường tròn tâm O, tiếp tuyến này cắt đường thẳng MN tại K

a) Chứng minh rằng: $MN^2=AH.HO$

b) Chứng minh rằng $KA=KE$

Bài 9: *(1,5 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO với BC, BO với AC, CO với AB Chứng minh rằng : $AD+BE+CF\geq\frac{9R}{2}$

Bài 10: *(1,5 điểm)* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+2b+3c=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{6bc}{4b^2+9c^2}+\frac{3ca}{9c^2+a^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}\right)\geq\frac{15}{4}$

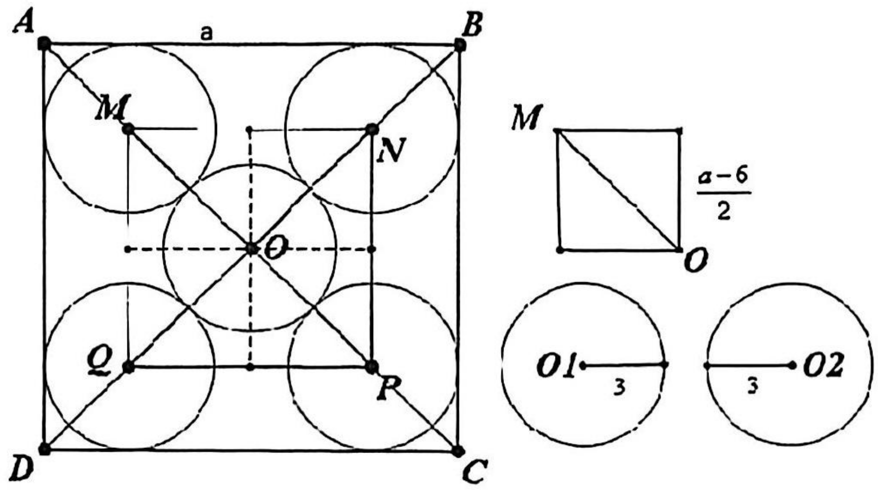
-------------------Hết-------------------

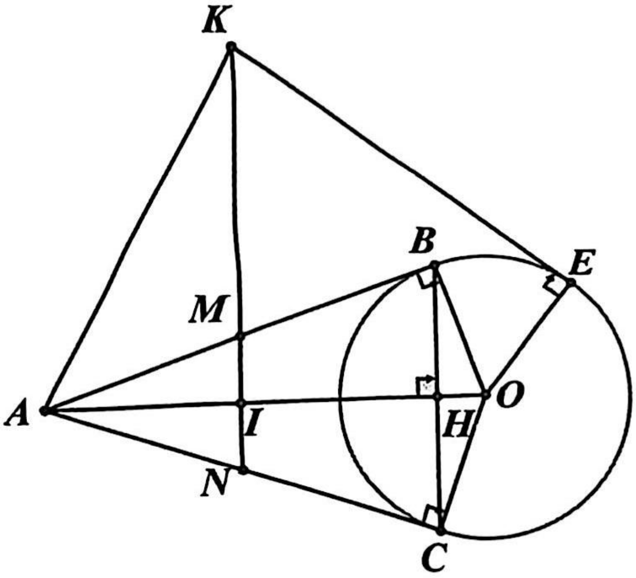
Họ tên học sinh:..số báo danh:........................

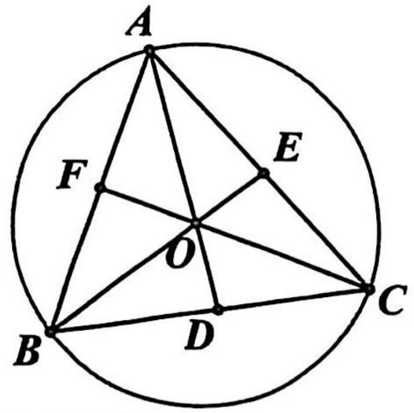
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Câu	Nội dung đáp án	Điểm
1	**Rút gọn biểu thức** $P=\dfrac{x-4\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}+\dfrac{1-3\sqrt{x}+x}{x^2+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}$, với $x>0$.	**2.0**
	Với $x>0$, ta có: $P=\dfrac{x-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}+\dfrac{1-3\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(x-\sqrt{x}+1)}$ $=\dfrac{\sqrt{x}(x-4\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}+\dfrac{1-3\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}+\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$ $=\dfrac{x\sqrt{x}-2x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}=\dfrac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$ $=\dfrac{\sqrt{x}(x+1)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}=\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-\sqrt{x}+1}$.	0,5 0,5 0,5 0,5
2	**Cho $x,y>1$ thỏa mãn $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=\frac{5}{xy+4}$. Tính giá trị của biểu thức $A=x^3+y^3+9xy$.**	**2.0**
	Ta có $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=\frac{5}{xy+4}\Rightarrow(xy+4)(x+y+2)=5(x+1)(y+1)$ $\Leftrightarrow xy(x+y)+3=3xy+x+y\Leftrightarrow(x+y-3)(xy-1)=0$ (1) Với $x,y>1$ thì $xy-1>0$, do đó (1) $\Leftrightarrow x+y=3$. Vậy $A=x^3+y^3+9xy=(x+y)^3-3xy(x+y)+9xy$ $=3^3-3xy.3+9xy=27$	1.0 1,0
3	Giải phương trình $x^2+\sqrt{x+2025}=x+\sqrt{x^2+2025}$.	**2.0**
	Điều kiện $x+2025\ge 0\Leftrightarrow x\ge -2025$ $x^2+\sqrt{x+2025}=x+\sqrt{x^2+2025}$ $x^2-x=\sqrt{x^2+2025}-\sqrt{x+2025}$ $x^2-x=\dfrac{(x^2+2025)-(x+2025)}{\sqrt{x^2+2025}+\sqrt{x+2025}}$ $(x^2-x)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2025}+\sqrt{x+2025}}\right)=0$ $x^2-x=0$ **(1)** hoặc $1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2025}+\sqrt{x+2025}}=0$ **(2)** Giải phương trình **(1)** ta được hai nghiệm $x=0,x=1$ (thỏa mãn điều kiện) Biến đổi phương trình (2) ta được $\sqrt{x^2+2025}+\sqrt{x+2025}=1$ Nhận thấy $\sqrt{x^2+2025}\ge\sqrt{2025}>1\Rightarrow\sqrt{x^2+2025}+\sqrt{x+2025}>1$ nên phương trình (2) vô nghiệm Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=0,x=1$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

4	**Một xe container chở 1000 túi cam gồm ba loại, 200 túi Cam Cao Phong, 300 túi Cam sành và 500 túi cam giấy. Các túi cam có kích thước như nhau. Một người lấy ngẫu nhiên ba túi cam từ container này. Xác suất của biến cố "lấy được cả ba túi cùng một loại cam" là bao nhiêu?**	**2.0**
	+) Chọn 3 túi cam trong 1000 túi - Có 1000 cách chọn túi cam thứ nhất. - Có 999 cách chọn túi cam thứ hai. - Có 998 cách chọn túi cam thứ ba. Vì cách chọn túi cam không phụ thuộc vào thứ tự của túi cam nên với cách chọn trên thì mỗi cách chọn đã tính 6 lần. Tổng số cách chọn ra 3 túi cam từ 100 túi là: (1000.999.998):6 = 166167000. Để chọn được ba túi cam cùng loại ta có các TH sau. TH1: Chọn được 3 túi cam Cao Phong trong 200 túi. Tổng số cách chọn trong TH này là: (200.199.198):6 = 1313400 TH2: Chọn được 3 túi cam sành trong 300 túi là. Tổng số cách chọn trong TH này là: (300.299.298): 6 = 4455100 TH3: Chọn được 3 túi cam giấy trong 500 túi là. Tổng số cách chọn trong TH này là: (500.499.498):6 = 20708500 Tổng số cách chọn trong 3 TH là: 1313400 + 4455100 + 20708500 = 25177000 Xác suất của biến cố "lấy được cả ba túi cùng một loại cam" là $\frac{25177000}{166167000} = 0,1515$	0.5 0.5 0.25 0.25 0.5
5	**Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn điều kiện $m + n + 1$ là ước nguyên tố của $4(m^2 + mn + n^2) - 3$. Chứng minh rằng:$4(m^2 + mn + n^2) - 3$ chia hết cho $m + n - 1$**	**2.0**
	Theo bài ra ta có: $4m^2 + 4mn + 4n^2 - 3 \vdots m + n + 1$ $\Rightarrow 4m^2 + 4mn + 4n^2 - 3 - 4n(m + n + 1) + 4(m + n + 1) \vdots m + n + 1$ $\Rightarrow 4m^2 + 4m + 1 \vdots m + n + 1$ $\Rightarrow (2m + 1)^2 \vdots m + n + 1$ Vì m +n +1 là số nguyên tố nên $(2m + 1) \vdots (m + n + 1)$ Ta có: $(2m + 1) \vdots (m + n + 1) \Rightarrow 2m + 1 = k(m + n + 1), k \in N^*$ Mà $2m + 1 < 2m + 2 + 2n = 2(m + n + 1)$ do m, n dương Suy ra: $k(m + n + 1) < 2(m + n + 1) \Rightarrow k < 2$ mà $k \in N^*$suy ra k =1 Hay $2m + 1 = m + n + 1 \Rightarrow m = n$ Khi đó ta có $\begin{cases} m + n - 1 = 2m - 1 \\ 4m^2 + 4mn + 4n^2 - 3 = 12m^2 - 3 = 3(2m + 1)(2m - 1) \end{cases}$ Vậy $4(m^2 + mn + n^2) - 3$ chia hết cho $m + n - 1$	0,5 0,5 0.5 0,5
	Bà H gửi một số tiền vào quỹ tiết kiệm với lãi suất 1, 2% một tháng. Sau 6 tháng bà nhận được số tiền là 48 000 000đồng. Hỏi lúc đầu bà H gửi bao nhiêu tiền	**1,5**

6		
	Gọi x (đồng) là số tiền mà bà H gửi ngân hàng ($x > 0$.) Số tiền lãi bà H nhận được sau khi hết hạn 1 tháng là: $x.1,2\% = x.0,012$ (đồng).	0,25
	Số tiền bà Toán nhận được sau khi hết hạn 1 tháng là: $x + 0,012x = (1+0,012)x$ (đồng).	0,25
	Số tiền bà Toán nhận được sau khi hết hạn 2 tháng là: $1,012x + 1,012x.1,2\% = 1,012x + 1,012x.0,012 = (1+0,012)^2x$ (đồng).	0,25
	Số tiền bà Toán nhận được sau khi hết hạn 3 tháng là: $(1+0,012)^2x + (1+0,012)^2x.1,2\% = (1+0,012)^2x + 1(1+0,012)^2x.0,012 = (1+0,012)^3$ (đồng).	0,25
	… Số tiền lãi bà Toán nhận được sau khi hết hạn 6 tháng là: $(1+0,012)^6x$ (đồng) Sau 6 tháng bà Toán nhận được số tiền là 48 000 000 đồng nên ta có phương trình: $(1+0,012)^6x = 48.000.000$ $x = 48.000.000 : (1+0,012)^6 \approx 44684630$ (Thỏa mãn điều kiện của ẩn)	0,25
	Vậy ban đầu bà Toán gửi số tiền là 44684630 đồng	0,25
7	**Người ta làm một cái hộp hình vuông để đựng được 5 cái bánh hình tròn có đường kính $6cm$, sao cho không có bất kì hai cái bánh nào được chồng lên nhau. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của cái hộp.**	**1,5**
	Giả sử đáy cái hộp bánh là hình vuông ABCD Gọi O là tâm hình vuông ABCD cạnh là a > 6 chứa 5 cái bánh hình tròn bán kính bằng 3cm sao cho không có bất kì hai cái bánh nào trong chúng có điểm trong chung.	0,25
	Suy ra tâm của năm hình tròn này nằm trong hoặc trên cạnh hình vuông MNPQ tâm O có cạnh là (a – 6) ($M \in OA$; $N \in OB$; MN//AB và MN cách AB một khoảng 3cm). Các đường trung bình của hình vuông MNPQ chia hình vuông này thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau. 	0,25 0,25
	Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một hình vuông nhỏ chứa ít nhất hai trong năm tâm của 5 cái bánh hình tròn nói trên, chẳng hạn đó là O_1 và O_2.	0,25

	Do 5 cái bánh hình tròn này không có hai cái bánh nào có điểm trong chung nên $O_1O_2 \geq 6$ (1) Mặt khác O_1O_2 cũng nằm trong hoặc trên cạnh hình vuông nhỏ có cạnh là $\frac{a-6}{2}$ nên $O_1O_2 \leq OM = \frac{a-6}{2}.\sqrt{2}$ (2) (trong đó $\frac{a-6}{2}.\sqrt{2}$ là đường chéo hình vuông nhỏ) Từ (1), (2) suy ra $\frac{a-6}{2}.\sqrt{2} \geq 6 \Leftrightarrow a \geq 6\sqrt{2}+6$. Vậy cạnh nhỏ nhất của hộp bánh hình vuông ABCD là $6\sqrt{2}+6$ (cm)	0,25 0,25
8	**Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Điểm Anằm bên ngoài đường tròn tâm O. Qua Avẽ hai tiếp tuyến AB, ACvới đường tròn (B, Clà các tiếp điểm). Gọi M, Nlần lượt là trung điểm của AB, AC; Hlà giao điểm của AOvới BC. Lấy điểm E bất kỳ trên đường tròn (Ekhác B và C). Qua Evẽ tiếp tuyến với đường tròn tâm O, tiếp tuyến này cắt đường thẳng MN tại K** **a) Chứng minh rằng: $MN^2 = AH.HO$** **b) Chứng minh rằng $KA = KE$**	4,0
	 	
a	Ta có ΔABCcân tại A suy ra $AB = AC$ ΔOBCcân tại O suy ra $OB = OC$ Suy ra AOlà đường trung trực của $BC \Rightarrow AO \perp BC$tại trung điểm Hcủa BCXét ΔABOvuông tại B có đường cao BHnên $AH.HO = BH^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{BC^2}{4}$ Vì MNlà đường trung bình của ΔABCnên $MN = \frac{BC}{2}$ Do đó: $MN^2 = \frac{BC^2}{4} \Rightarrow MN^2 = AH.HO$	1.0 1.0
b	$\boldsymbol{\Delta KEO}$vuông tại E, ta có : $KE^2 = KO^2 - OE^2$ $= KO^2 - R^2 (1)$ $Do MN//BC, BC \perp AO suyra MN \perp AO$. Gọi I là giao điểm của MNvà AO, ta có: $KA^2 = KI^2 + IA^2 = KO^2 - OI^2 + IA^2$ $= KO^2 + (AI + OI)(AI - OI)$	0.5 0.5

	$= KO^2 - AO.(OI - AI)$ Do $MN//BC, M$là trung điểm của$AB, suyra: I$là trung điểm của AH $\Rightarrow AI = IH \Rightarrow OI - AI = OI - IH = OH$ $\Rightarrow KA^2 = KO^2 - AO.OH = KO^2 - OB^2 = KO^2 - R^2 (2)$ Từ $(1), (2) \Rightarrow KE^2 = KA^2 \Rightarrow KE = KA$	 0.5 0.5
	Cho tam giác ABCcó ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi D, E, Flần lượt là giao điểm của các đường thẳng AOvới BC, BOvới AC, COvới AB. Chứng minh rằng : $AD + BE + CF \geq \frac{9R}{2}$	1.5
	 	
9	Ta có: $$\frac{OA}{AD} = \frac{S_{AOC}}{S_{ADC}} = \frac{S_{AOB}}{S_{ABD}} = \frac{S_{AOB} + S_{AOC}}{S_{ABC}}$$ Tương tự: $\frac{OB}{BE} = \frac{S_{AOB}+S_{OBC}}{S_{ABC}}; \frac{OC}{CF} = \frac{S_{AOC}+S_{OBC}}{S_{ABC}}$ Vì vậy suy ra:$\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$ Do đó $R\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right) = 2$ nên $2(AD + BE + CF) = R.(AD + BE + CF)\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right)$ Theo bất đẳng thức $AM - GM$ta có : $AD + BE + CF \geq 3\sqrt[3]{AD.BE.CF}$và $\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}\right) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{AD}.\frac{1}{BE}.\frac{1}{CF}}$ $$\Rightarrow 2(AD + BE + CF) \geq 9R \Rightarrow AD + BE + CF \geq \frac{9R}{2}$$ Dấu bằng xảy ra khi ΔABCđều	 0.5 0.5 0.5
	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + 2b + 3c = 1. **Chứng minh rằng: $\frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{6bc}{4b^2+9c^2} + \frac{3ca}{9c^2+a^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c}\right) \geq \frac{15}{4}$**	1.5
10	Vì a + 2b + 3c = 1 nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = \frac{a+2b+3c}{a} + \frac{a+2b+3c}{2b} + \frac{a+2b+3c}{3c}$ $= 3 + \left(\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{2b}{3c} + \frac{3c}{2b}\right) + \left(\frac{3c}{a} + \frac{a}{3c}\right) = 3 + \frac{a^2+4b^2}{2ab} + \frac{4b^2+9c^2}{6bc} + \frac{9c^2+a^2}{3ca}$ Do đó bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với: $\left(\frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{a^2+4b^2}{8ab}\right) + \left(\frac{6bc}{4b^2+9c^2} + \frac{4b^2+9c^2}{24bc}\right) + \left(\frac{3ca}{9c^2+a^2} + \frac{9c^2+a^2}{12ca}\right) \geq 3 \quad (1)$ Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương, ta có:	 0,25 0,25 0,25

	$\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{a^2+4b^2}{8ab}\geq 2\sqrt{\frac{2ab}{a^2+4b^2}.\frac{a^2+4b^2}{8ab}}=1$ (2)	
	Tương tự: $\frac{6bc}{4b^2+9c^2}+\frac{4b^2+9c^2}{24bc}\geq 1$ (3)	0,25
	$\frac{3ca}{9c^2+a^2}+\frac{9c^2+a^2}{12ca}\geq 1$ (4)	0,25
	Cộng theo vế các bất đẳng thức (2), (3), (4) ta suy ra (1). Suy ra đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a $=\frac{1}{3}$; b $=\frac{1}{6}$; c $=\frac{1}{9}$	0,25