

CHUYÊN ĐỀ SỐ NGUYÊN**CHỦ ĐỀ 1: SỐ NGUYÊN VÀ TẬP HỢP SỐ NGUYÊN****PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****1. TẬP HỢP SỐ NGUYÊN.**

- Các số tự nhiên (khác 0) $1; 2; 3; 4; \dots$ còn được gọi là các số nguyên dương.
- Các số $-1; -2; -3; \dots$ gọi là các số nguyên âm.
- Tập hợp $\mathbb{Z}$ gồm các số nguyên âm, số 0, số nguyên dương gọi là tập hợp số nguyên.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

- Tập hợp các số nguyên được biểu diễn trên trục số.
- Cho $a, b \in \mathbb{Z}$. Trên trục số, các điểm $a; b$ cách đều điểm 0 thì a được gọi là số đối của b và ngược lại b cũng là số đối của a , số đối của 0 là 0.

2. THỨ TỰ TRONG $\mathbb{Z}$

- Trên trục số nằm ngang, chiều dương của trục số hướng từ trái qua phải, chiều ngược lại là chiều âm.
- Điểm biểu diễn số nguyên a gọi là điểm a .
- Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ nếu điểm a nằm trước điểm b thì số nguyên a nhỏ hơn số nguyên b (ký hiệu là $a < b$)
- Mọi số nguyên âm đều nhỏ hơn 0, do đó nhỏ hơn mọi số nguyên dương.
- Nếu $a; b$ là hai số nguyên dương và $a > b$ thì $-a < -b$

* Nâng cao: Với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nếu $a < b; b < c$ thì $a < c$ (tính chất bắc cầu).

3. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ SỐ NGUYÊN.

- Muốn cộng hai số nguyên âm, ta cộng phần số tự nhiên của chúng với nhau rồi đặt dấu "-" trước kết quả.
- Hai số nguyên đối nhau thì có tổng bằng 0.
- Muốn cộng hai số nguyên khác dấu (không đối nhau), ta tìm hiệu hai phần số tự nhiên của chúng (số lớn trừ số nhỏ) rồi đặt trước hiệu tìm được dấu của số có phần số tự nhiên lớn hơn.
- Phép cộng số nguyên có các tính chất:
 - * Giao hoán: $a + b = b + a$
 - * Kết hợp: $(a + b) + c = a + (b + c)$
 - * Cộng với 0: $a + 0 = 0 + a = a$
- Muốn trừ số nguyên a cho số nguyên b , ta cộng a với số đối của b

$$a - b = a + (-b)$$

- Quy tắc dấu ngoặc:

* Khi bỏ dấu ngoặc có dấu "+" đằng trước, ta *giữ nguyên dấu của các số hạng* trong ngoặc.

* Khi bỏ dấu ngoặc có dấu "-" đằng trước, ta phải *đổi dấu tất cả các số hạng* trong dấu ngoặc: dấu "+" đổi thành dấu "-" và dấu "-" đổi thành dấu "+"

4. PHÉP NHÂN SỐ NGUYÊN.

- Nhân hai số nguyên khác dấu: Nếu $m, n \in \mathbb{N}^*$ thì $m \cdot (-n) = (-n) \cdot m = -(m \cdot n)$

- Nhân hai số nguyên cùng dấu:

+) Nhân hai số nguyên dương chính là nhân hai số tự nhiên khác 0.

+) Nhân hai số nguyên âm: Nếu $m, n \in \mathbb{N}^*$ thì $(-m) \cdot (-n) = (-n) \cdot (-m) = m \cdot n$

- Phép nhân số nguyên có các tính chất:

* Giao hoán: $a \cdot b = b \cdot a$

* Kết hợp: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

* Nhân với 1: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

* Phân phối của phép nhân đối với phép cộng: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1: Viết tập hợp.

Dạng 2: Thực hiện phép tính

Dạng 3: Tìm x

Dạng 1: Viết tập hợp.

I. Phương pháp giải

- Dựa vào các kiến thức về tập hợp, tập hợp số nguyên, thứ tự trong tập $\mathbb{Z}$ để làm bài.

II. Bài toán

Bài 1: Viết tập hợp 3 số nguyên liên tiếp trong đó có số 0.

Lời giải:

- Nếu số 0 đứng vị trí thứ nhất ta có tập hợp $\{0; 1; 2\}$

- Nếu số 0 đứng vị trí thứ hai ta có tập hợp $\{-1; 0; 1\}$

- Nếu số 0 đứng vị trí thứ ba ta có tập hợp $\{-2; -1; 0\}$

Bài 2: Viết các tập hợp sau bằng hai cách:

- a) Tập hợp A các số tự nhiên nhỏ hơn 5.
- b) Tập hợp B các số nguyên nhỏ hơn 5.
- c) Tập hợp C các số nguyên lớn hơn -5.

Lời giải:

a) Cách 1: $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Cách 2: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

b) Cách 1: $B = \{\dots; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Cách 2: $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$

c) Cách 1: $C = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

Cách 2: $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -5\}$

Bài 3: Viết các tập hợp sau bằng hai cách:

- a) Tập hợp A các số nguyên lớn hơn -100 và nhỏ hơn 100.
- b) Tập hợp B các số nguyên có 1 chữ số.

Lời giải:

a) Cách 1: $A = \{-99; -98; -97; \dots; 97; 98; 99\}$

Cách 2: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -100 < x < 100\}$

b) Cách 1: $B = \{-9; -8; -7; \dots; 7; 8; 9\}$

Cách 2: $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -10 < x < 10\}$

Bài 4: Các phần tử của các tập hợp sau được viết theo quy luật nào? Viết tập hợp bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp.

a) $A = \{1; 3; 5; 7; 9; \dots\}$

b) $B = \{-2; -7; -12; -17; \dots\}$

Lời giải:

a) Tập hợp A gồm các số tự nhiên khác 0; các phần tử lập thành dãy số: 1; 3; 5; 7; 9; ...

Đây là dãy số cách đều, số hạng đầu là 1, khoảng cách là 2. Các số hạng của dãy là các số tự nhiên lẻ (chia 2 dư 1) nên có dạng $2n+1$ với $n \in \mathbb{N}$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n + 1; n \in \mathbb{N}\}$$

b) Tập hợp B gồm các số nguyên âm; các phần tử lập thành dãy số: $-2; -7; -12; -17; \dots$ (1)

Xét dãy số $2; 7; 12; 17; \dots$ (2)

Dãy (2) là dãy số cách đều, số hạng đầu là 2, khoảng cách là 5. Các số này đều chia 5 dư 2 nên có dạng $5n + 2$ với $n \in \mathbb{N}$.

Vậy các số hạng của dãy (1) có dạng là $-(5n + 2)$ với $n \in \mathbb{N}$.

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = -(5n + 2); n \in \mathbb{N}\}$$

Bài 5: Các phần tử của các tập hợp sau được viết theo quy luật nào? Viết tập hợp bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp.

a) $A = \{1; -5; 9; -13; \dots\}$

b) $B = \{-1; 4; -7; 10; \dots\}$

Lời giải:

a) Các phần tử của tập A lập thành dãy số $1; -5; 9; -13; \dots$ (1)

Trong dãy (1), các số đứng ở vị trí lẻ mang dấu (+), các số đứng ở vị trí chẵn mang dấu (-)

Xét dãy số (gồm các số hạng là phần số tự nhiên của các số trên) $1; 5; 9; 13; \dots$ (2)

Dãy (2) là dãy số cách đều, số hạng đầu là 1; khoảng cách là 4. Các số này đều chia 4 dư 1 nên có dạng $4n + 1$ với $n \in \mathbb{N}$

Từ quy luật về dấu cho các số hạng của dãy (1), ta có dạng tổng quát cho các số hạng của dãy (1) là $(-1)^n \cdot (4n + 1)$ với $n \in \mathbb{N}$

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = (-1)^n \cdot (4n + 1); n \in \mathbb{N}\}$$

b) Các phần tử của tập B lập thành dãy số $-1; 4; -7; 10; \dots$ (3)

Trong dãy (3), các số đứng ở vị trí lẻ mang dấu (-), các số đứng ở vị trí chẵn mang dấu (+)

Xét dãy số (gồm các số hạng là phần số tự nhiên của các số trên) $1; 4; 7; 10; \dots$ (4)

Dãy (4) là dãy số cách đều, số hạng đầu là 1; khoảng cách là 3. Các số này đều chia 3 dư 1 nên có dạng $3n + 1$ với $n \in \mathbb{N}$

Từ quy luật về dấu cho các số hạng của dãy (3), ta có dạng tổng quát cho các số hạng của dãy (3) là $(-1)^{n+1} \cdot (3n + 1)$ với $n \in \mathbb{N}$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = (-1)^{n+1} \cdot (3n + 1); n \in \mathbb{N}\}$$

Dạng 2: Thực hiện phép tính**I. Phương pháp giải**

- Áp dụng các tính chất của phép cộng, phép nhân số nguyên; quy tắc dấu ngoặc.
- Áp dụng các công thức, cách tính dãy số có quy luật.

II. Bài toán**Bài 1:** Thực hiện phép tính:

- a) $-(-319) + (-127) - 312 + 20$
- b) $1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$
- c) $(-42).56 + 28.(-316).(-1)^{2n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$
- d) $5^3.5678910 - 5^3.5678909$

Lời giải:

$$\begin{aligned}\text{a) } & -(-319) + (-127) - 312 + 20 \\ & = 319 - 127 - 312 + 20 \\ & = 319 - 312 + 20 - 127 \\ & = 27 - 127 \\ & = -100\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } & 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374) \\ & = 1152 - 374 - 1152 - 65 + 374 \\ & = 1152 - 1152 + 374 - 374 - 65 \\ & = (1152 - 1152) + (374 - 374) - 65 \\ & = -65\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } & (-42).56 + 28.(-316).(-1)^{2n} \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \\ & = (-42).56 + 28.(-316).1 \\ & = (-42).56 + 28.(-316) \\ & = (-42).2.28 + 28.(-316) \\ & = (-84).28 + 28.(-316) \\ & = 28.[-84 + (-316)] \\ & = 28.(-400) \\ & = -11200\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } & 5^3.5678910 - 5^3.5678909 \\ & = 5^3.(5678910 - 5678909) \\ & = 5^3.1 \\ & = 125\end{aligned}$$

Bài 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $2021.(2020 + 2022) - 2020.(2021 + 2022)$
- b) $2021.(2022 - 179) - 2022.(2021 - 179)$
- c) $2.31.12 + 4.6.42 + 8.27.3$
- d) $-2021.74 - 2021.27 + 2021$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2021.(2020+2022) - 2020.(2021+2022) \\ &= 2021.2020 + 2021.2022 - 2020.2021 - 2020.2022 \\ &= 2021.2020 - 2020.2021 + 2021.2022 - 2020.2022 \\ &= 2022.(2021-2020) \\ &= 2022 \\ \text{b)} \quad & 2021.(2022-179) - 2022.(2021-179) \\ &= 2021.2022 - 2021.179 - 2022.2021 + 2022.179 \\ &= 2021.2022 - 2022.2021 + 2022.179 - 2021.179 \\ &= 179.(2022-2021) \\ &= 179 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 2.31.12 + 4.6.42 + 8.27.3 \\ &= 2.12.31 + 4.6.42 + 8.3.27 \\ &= 24.31 + 24.42 + 24.27 \\ &= 24.(31+42+27) \\ &= 24.100 = 2400 \\ \text{d)} \quad & -2021.74 - 2021.27 + 2021 \\ &= -(2021.74 + 2021.27 - 2021) \\ &= -(2021.74 + 2021.27 - 2021.1) \\ &= -2021(74+27-1) \\ &= -2021.100 = -202100 \end{aligned}$$

Bài 3: Thực hiện phép tính:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 1.2.3....9 - 1.2.3....8 - 1.2.3....7.8^2 \\ \text{b)} \quad & (-25).68 + (-34).(-250) \\ \text{c)} \quad & x-6+x-6+x-6+x-6+x-6 \text{ với } x=-7 \\ \text{d)} \quad & 20212021.(-2022) - 20222022.(-2021) \end{aligned}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 1.2.3....9 - 1.2.3....8 - 1.2.3....8^2 \\ &= 1.2.3...8.9 - 1.2.3....8.1 - 1.2.3....8.8 \\ &= 1.2.3...8.(9-1-8) \\ &= 0 \\ \text{b)} \quad & (-25).68 + (-34).(-250) \\ &= (-25).2.34 + (-34).(-250) \\ &= (-50).34 + 34.250 \\ &= 34.[(-50)+250] \\ &= 34.200 = 6800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & x-6+x-6+x-6+x-6+x-6 \\ &= (x-6)+(x-6)+(x-6)+(x-6)+(x-6) \\ &= 5.(x-6) \\ & \text{Thay } x=-7 \text{ vào ta có } 5.(-7-6) = -65 \\ \text{d)} \quad & 20212021.(-2022) - 20222022.(-2021) \\ &= 2021.10001.(-2022) - 2022.10001.(-2021) \\ &= -2021.10001.2022 + 2022.10001.2021 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bài 4: Thực hiện phép tính:

$$\text{a)} \quad A = (1+2+3+...+2021).(1^2+2^2+3^2+...+10^2).(2020.111-3.5.37.404)$$

- b) $B = (-1) + (-5) + (-9) + \dots + (-101)$
 c) $C = (-1) + 3 + (-5) + 7 + \dots + (-2021) + 2023$
 d) $D = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$

Lời giải:

a)
$$\begin{aligned} A &= (1 + 2 + 3 + \dots + 2021) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \cdot (2020.111 - 3.5.37.404) \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 2021) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \cdot [2020.111 - (3.37) \cdot (5.404)] \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 2021) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \cdot [2020.111 - 111.2020] \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 2021) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} B &= (-1) + (-5) + (-9) + \dots + (-101) \\ &= -(1 + 5 + 9 + \dots + 101) \end{aligned}$$

 Xét tổng $1 + 5 + 9 + \dots + 101$
 Số số hạng của tổng là $(101 - 1) : 4 + 1 = 26$
 Tổng là: $(101 + 1) \cdot 26 : 2 = 1326$

Vậy $B = -1326$

c) $C = (-1) + 3 + (-5) + 7 + \dots + (-2021) + 2023$
 Số số hạng của C bằng số số hạng của dãy số $1; 3; 5; 7; \dots; 2023$ (*)
 Số số hạng của dãy (*) là $(2023 - 1) : 2 + 1 = 1012$
 Tổng C có 1012 số hạng, khi nhóm 2 số hạng vào một nhóm ta được 506 nhóm.
 Ta có
$$\begin{aligned} C &= [(-1) + 3] + [(-5) + 7] + \dots + [(-2021) + 2023] \\ &= 2 + 2 + \dots + 2 \\ &= 2.506 \\ &= 1012 \end{aligned}$$

d) $D = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$
 Số số hạng của D bằng số số hạng của dãy số $1; 2; 3; 4; \dots; 100$ (**)
 Số số hạng của dãy (**) là $(100 - 1) : 1 + 1 = 100$
 Tổng D có 100 số hạng, khi nhóm 2 số hạng vào một nhóm ta được 50 nhóm.
 Ta có
$$\begin{aligned} D &= (1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (99 - 100) \\ &= (-1) + (-1) + \dots + (-1) \\ &= -1.50 \end{aligned}$$

$$= -50$$

Bài 5: Tính:

- a) $A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 2019 - 2020 + 2021 + 2022$
 b) $B = 100 + 98 + 96 + 94 + \dots + 2 - 99 - 97 - 95 - 93 - \dots - 1$

Lời giải:

a)
$$\begin{aligned} A &= 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 2019 - 2020 + 2021 + 2022 \\ &= 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020 + 2021 + 2022 \\ &= 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (2018 - 2019 - 2020 + 2021) + 2022 \end{aligned}$$

Dãy các số tự nhiên liên tiếp $2; 3; 4; 5; \dots; 2021$ có $2021 - 2 + 1 = 2020$ số hạng, khi nhóm 4 số vào một nhóm ta được 505 nhóm.

Ta có
$$\begin{aligned} A &= 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (2018 - 2019 - 2020 + 2021) + 2022 \\ &= 1 + 0 + 0 + \dots + 0 + 2022 \\ &= 1 + 0.505 + 2022 \\ &= 2023 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} B &= 100 + 98 + 96 + 94 + \dots + 2 - 99 - 97 - 95 - 93 - \dots - 1 \\ &= 100 - 99 + 98 - 97 + 96 - 95 + \dots + 2 - 1 \\ &= (100 - 99) + (98 - 97) + (96 - 95) + \dots + (2 - 1) \end{aligned}$$

Từ 1 đến 100 có 100 số, khi nhóm 2 số vào một nhóm ta được 50 nhóm.

Vậy $B = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 1.50 = 50$

Bài 6: Tính

- a) $A = 2 + (-4) + 6 + (-8) + \dots + 2018 + (-2020) + 2022$
 b) $B = 2022 + 2020 + 2018 + 2016 + \dots + 2 - 2019 - 2017 - 2015 - \dots - 1$

Lời giải:

a) $A = 2 + (-4) + 6 + (-8) + \dots + 2018 + (-2020) + 2022$

Số số hạng của A bằng số số hạng của dãy $2; 4; 6; \dots; 2022$

$\Rightarrow A$ có $(2022 - 2) : 2 + 1 = 1011$ số hạng. Kể từ số hạng đầu tiên, khi nhóm hai số vào một nhóm thì ta được 505 nhóm và dư số 2022 đứng một mình.

Ta có $A = 2 + (-4) + 6 + (-8) + \dots + 2018 + (-2020) + 2022$

$$\begin{aligned} A &= [2 + (-4)] + [6 + (-8)] + \dots + [2018 + (-2020)] + 2022 \\ &= (-2) + (-2) + \dots + (-2) + 2022 \\ &= (-2).505 + 2022 \\ &= 1012 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= 2022 + 2020 + 2018 + 2016 + \dots + 2 - 2019 - 2017 - 2015 - \dots - 1 \\ &= 2022 + (2020 - 2019) + (2018 - 2017) + (2016 - 2015) + \dots + (2 - 1) \end{aligned}$$

Từ 1 đến 2020 có 2020 số, khi nhóm 2 số vào một nhóm ta được 1010 nhóm.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } B &= 2022 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= 2022 + 1 \cdot 1010 = 3032 \end{aligned}$$

Bài 7: Thực hiện phép tính:

- a) $A = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots - 2^{99} + 2^{100}$
 b) $B = 2^{2018} - 2^{2017} - 2^{2016} + 2^{2015} - 2^{2014} - 2^{2013} + \dots + 2^2 - 2 - 1$
 c) $C = 1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 - \dots + 2007 + 2008 - 2009 - 2010$
 d) $D = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 18^3$ với $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 = 2025$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots - 2^{99} + 2^{100} \\ &= (1 - 2) + (2^2 - 2^3) + \dots + (2^{98} - 2^{99}) + 2^{100} \\ &= (1 - 2) + 2^2(1 - 2) + \dots + 2^{98}(1 - 2) + 2^{100} \\ &= (-1) + 2^2(-1) + \dots + 2^{98}(-1) + 2^{100} \\ &= 2^{100} - 2^{98} - 2^{96} - \dots - 2^2 - 1 \\ &= 2^{100} - (2^{98} + 2^{96} + \dots + 2^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } S = 2^{98} + 2^{96} + \dots + 2^2 + 1$$

$$\text{Ta có } 2^2 S = 2^2 \cdot (2^{98} + 2^{96} + \dots + 2^2 + 1) = 2^{100} + 2^{98} + \dots + 2^4 + 2^2$$

$$\Rightarrow 2^2 S - S = (2^{100} + 2^{98} + \dots + 2^4 + 2^2) - (2^{98} + 2^{96} + \dots + 2^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 3S = 2^{100} - 1 \Rightarrow S = \frac{2^{100} - 1}{3}$$

$$\text{Vậy } A = 2^{100} - S = 2^{100} - \frac{2^{100} - 1}{3} = \frac{2^{101} + 1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= 2^{2018} - 2^{2017} - 2^{2016} + 2^{2015} - 2^{2014} - 2^{2013} + \dots + 2^2 - 2 - 1 \\ &= (2^{2018} - 2^{2017} - 2^{2016}) + (2^{2015} - 2^{2014} - 2^{2013}) + (2^{2012} - 2^{2011} - 2^{2010}) + \dots + (2^5 - 2^4 - 2^3) + (2^2 - 2 - 1) \\ &= 2^{2016} (2^2 - 2 - 1) + 2^{2013} (2^2 - 2 - 1) + 2^{2010} (2^2 - 2 - 1) + \dots + 2^3 \cdot (2^2 - 2 - 1) + 1 \cdot (2^2 - 2 - 1) \\ &= (2^2 - 2 - 1) \cdot (2^{2016} + 2^{2013} + 2^{2010} + \dots + 2^3 + 1) \\ &= 2^{2016} + 2^{2013} + 2^{2010} + \dots + 2^3 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } 2^3 B = 2^3 \cdot (2^{2016} + 2^{2013} + 2^{2010} + \dots + 2^3 + 1) = 2^{2019} + 2^{2016} + 2^{2013} + \dots + 2^6 + 2^3$$

$$\Rightarrow 2^3 B - B = (2^{2019} + 2^{2016} + 2^{2013} + \dots + 2^6 + 2^3) - (2^{2016} + 2^{2013} + 2^{2010} + \dots + 2^3 + 1)$$

$$\Rightarrow 7B = 2^{2019} - 1 \Rightarrow B = \frac{2^{2019} - 1}{7}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= 1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 - \dots + 2007 + 2008 - 2009 - 2010 \\ &= 1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 - \dots - 2006 + 2007 + 2008 - 2009 - 2010 \\ &= 1 - (2 - 3 - 4 + 5) - (6 - 7 - 8 + 9) - \dots - (2006 - 2007 - 2008 + 2009) - 2010 \quad (*) \end{aligned}$$

Từ 2 đến 2009 có $2009 - 2 + 1 = 2008$ số, khi nhóm 4 số vào một nhóm ta được 502 nhóm, mỗi nhóm ở (*) đều có tổng bằng 0.

$$\text{Vậy ta có } C = 1 - 0 - 0 - \dots - 0 - 2010 = 1 - 0.502 - 2010 = -2009$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 18^3 \\ &= (2.1)^3 + (2.2)^3 + (2.3)^3 + \dots + (2.9)^3 \\ &= 2^3.1^3 + 2^3.2^3 + 2^3.3^3 + \dots + 2^3.9^3 \\ &= 2^3.(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3) \quad (**) \end{aligned}$$

Vì $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 = 2025$ nên thay vào (**) ta có $D = 2^3.2025 = 16200$

$$\text{Vậy } D = 16200$$

Bài 8: Cho $A = 5^{50} - 5^{48} + 5^{46} - 5^{44} + \dots + 5^6 - 5^4 + 5^2 - 1$

- Thu gọn A .
- Tìm số tự nhiên n biết $26.A + 1 = 5^n$.
- Tìm số dư trong phép chia A cho 100.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 5^{50} - 5^{48} + 5^{46} - 5^{44} + \dots + 5^6 - 5^4 + 5^2 - 1 \\ &= (5^{50} - 5^{48}) + (5^{46} - 5^{44}) + \dots + (5^6 - 5^4) + (5^2 - 1) \\ &= 5^{48}(5^2 - 1) + 5^{44}(5^2 - 1) + \dots + 5^4(5^2 - 1) + 1(5^2 - 1) \\ &= 24.(5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } S = 5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4 + 1$$

$$\text{Ta có } 5^4.S = 5^4.(5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4 + 1) = 5^{52} + 5^{48} + \dots + 5^8 + 5^4$$

$$\Rightarrow 5^4 S - S = (5^{52} + 5^{48} + \dots + 5^8 + 5^4) - (5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4 + 1)$$

$$\Rightarrow 624.S = 5^{52} - 1 \Rightarrow S = \frac{5^{52} - 1}{624}$$

$$\text{Vậy } A = 24. \frac{5^{52} - 1}{624} = \frac{5^{52} - 1}{26}$$

b) Theo ý a ta có $A = \frac{5^{52} - 1}{26} \Rightarrow 26A = 5^{52} - 1 \Rightarrow 26A + 1 = 5^{52}$

Mặt khác theo đề bài ta có $26.A + 1 = 5^n$ nên suy ra $5^n = 5^{52} \Rightarrow n = 52$

Vậy $n = 52$

c) Theo ý a ta có $A = 24.(5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4 + 1)$
 $= 24.(5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4) + 24$
 $= 6.4.5^2(5^{46} + 5^{42} + \dots + 5^2) + 24$
 $= 100.6.(5^{46} + 5^{42} + \dots + 5^2) + 24$
 $\Rightarrow A$ có dạng $100k + 24$; $k \in \mathbb{N} \Rightarrow A$ chia 100 dư 24

Bài 9: Cho x là tổng của tất cả các số nguyên có 2 chữ số; y là số nguyên âm lớn nhất. Tính $S = 2020.x^{2021} - 2021.y^{2020}$

Lời giải:

Các số nguyên có 2 chữ số là: $-99; -98; -97; \dots; 97; 98; 99$

Vì x là tổng của tất cả các số nguyên có 2 chữ số nên $x = (-99) + (-98) + (-97) + \dots + 97 + 98 + 99$

$$= [(-99) + 99] + [(-98) + 98] + [(-97) + 97] + \dots + [(-1) + 1] + 0 = 0$$

Vì y là số nguyên âm lớn nhất nên $y = -1$.

Thay $x = 0, y = -1$ vào S ta được $S = 2020.0^{2021} - 2021.(-1)^{2020} = 0 - 2021.1 = -2021$

Vậy $S = -2021$

Bài 10: Tính giá trị của $M = a_1 + a_2 + a_{2021}$ biết $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2021} \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2021} = 0$ và $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = \dots = a_{2019} + a_{2020} = a_{2021} + a_1 = 2$

Lời giải:

Ta có $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2021} = 0$

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2019} + a_{2020}) + a_{2021} = 0 \quad (*)$$

Với 2020 số $a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_{2020}$ khi nhóm 2 số vào một nhóm ta được 1010 nhóm.

Thay $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = \dots = a_{2019} + a_{2020} = 2$ vào $(*)$ ta được

$$2 + 2 + \dots + 2 + a_{2021} = 0$$

$$2.1010 + a_{2021} = 0$$

$$2020 + a_{2021} = 0$$

$$a_{2021} = -2020$$

Ta có $a_1 + a_2 = 2$; $a_{2021} = -2020$ thay vào M ta được:

$$M = a_1 + a_2 + a_{2021} = 2 + (-2020) = -2018$$

Vậy $M = -2018$

Dạng 3: Tìm x

I. Phương pháp giải

- Áp dụng các kiến thức về số nguyên, thứ tự thực hiện phép tính, lũy thừa.
- Áp dụng các công thức, cách tính dãy số có quy luật.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

- a) $(1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 98 + 99)x = -100$
- b) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$
- c) $(x + 2)(x - 3) = 0$
- d) $(x - 2)^2 + 5(x - 2) = 0$

Lời giải:

- a) $(1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 98 + 99)x = -100$
 $\Rightarrow [(1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (97 - 98) + 99]x = -100$
 $\Rightarrow [(-1) + (-1) + \dots + (-1) + 99]x = -100$
 $\Rightarrow [(-1) \cdot 49 + 99]x = -100$
 $\Rightarrow 50x = -100$
 $\Rightarrow x = -2$
Vậy $x = -2$
- b) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$
 $\Rightarrow 2016 : [25 - (3x + 2)] = 63$
 $\Rightarrow 25 - (3x + 2) = 2016 : 63$
 $\Rightarrow 25 - (3x + 2) = 32$
 $\Rightarrow 3x + 2 = 25 - 32$

$$\Rightarrow 3x + 2 = -7$$

$$\Rightarrow 3x = -9$$

$$\Rightarrow x = -3$$

Vậy $x = -3$

c) $(x+2)(x-3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{-2; 3\}$

d) $(x-2)^2 + 5(x-2) = 0$

$$\Rightarrow (x-2) \cdot [(x-2) + 5] = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{2; -3\}$

Bài 2: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $(x+5) + (x+10) + (x+15) + \dots + (x+60) = 450$

b) $(6x-11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$

c) $(x+1)^2 - 5x - 5 = 0$

Lời giải:

a) $(x+5) + (x+10) + (x+15) + \dots + (x+60) = 450$

$$\Rightarrow (x+x+x+\dots+x) + (5+10+15+\dots+60) = 450 \quad (*)$$

Tính $S = 5 + 10 + 15 + \dots + 60$

Số số hạng của S là $(60-5):5+1=12$

Tổng $S = (60+5) \cdot 12 : 2 = 390$

Theo đề bài, mỗi một x cộng với một số cụ thể nên có 12 số cụ thể thì cũng có 12 số x

Thay các kết quả trên vào (*) ta được:

$$12x + 390 = 450$$

$$\Rightarrow 12x = 450 - 390$$

$$\Rightarrow 12x = 60$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Vậy $x = 5$

$$b) (6x-11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$$

$$\Rightarrow (6x-11)^3 = 343$$

$$\Rightarrow (6x-11)^3 = 7^3$$

$$\Rightarrow 6x-11 = 7$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Vậy $x = 3$

$$c) (x+1)^2 - 5x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - (5x+5) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - 5(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1) \cdot [(x+1) - 5] = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{-1; 4\}$

Bài 3: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

$$a) (2x-15)^5 = (2x-15)^3$$

$$b) x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020 + 2021 = 2021$$

Lời giải:

$$a) (2x-15)^5 = (2x-15)^3$$

$$\Rightarrow (2x-15)^5 - (2x-15)^3 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-15)^3 \cdot (2x-15)^2 - (2x-15)^3 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-15)^3 = 0 \\ (2x-15)^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-15 = 0 \\ (2x-15)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-15 = 0 \\ 2x-15 = 1 \\ 2x-15 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7,5 \\ x = 8 \\ x = 7 \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 7$ hoặc $x = 8$

Vậy $x \in \{7; 8\}$

b) $x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020 + 2021 = 2021$

Cách 1:

$$x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020 + 2021 = 2021$$

$$\Rightarrow x + (x+1) + (x+2) + \dots + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + \dots + 2020 = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow (x+2020) + [(x+1)+2019] + [(x+2)+2018] + \dots + [(-2)+2] + [(-1)+1] + 0 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2020) + (x+2020) + (x+2020) + \dots + [(-2)+2] + [(-1)+1] + 0 = 0$$

Ta có vế trái của (*) là tổng các số nguyên liên tiếp viết theo thứ tự tăng dần, khi nhóm như trên, trong từng ngoặc là các cặp số đối nhau $\Rightarrow x + 2020 = 0 \Rightarrow x = -2020$

Vậy $x = -2020$

Cách 2:

$$x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020 + 2021 = 2021$$

$$\Rightarrow x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020 = 0 \quad (1)$$

Vì $x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020$ là tổng của các số nguyên liên tiếp nên áp dụng công thức tính tổng của dãy số cách đều ta có tổng này bằng $\frac{(2020+x).n}{2}$ (2) trong đó n là số các số hạng của tổng.

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{(2020+x).n}{2} = 0$.

Lại có $n \neq 0$ suy ra $2020 + x = 0$, do đó $x = -2020$

Vậy $x = -2020$

Bài 4: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = 1 \underbrace{000\dots 0}_{18 \text{ chữ số}} : 5^{18}$

b) $(x-3) + (x-2) + (x-1) + \dots + 10 + 11 = 11$

Lời giải:

a) $2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = 1 \underbrace{000\dots 0}_{18 \text{ chữ số}} : 5^{18}$

$$\Rightarrow 2^{x+(x+1)+(x+2)} = 10^{18} : 5^{18}$$

$$\Rightarrow 2^{3x+3} = 2^{18}$$

$$\Rightarrow 3x+3 = 18$$

$$\Rightarrow 3x = 15$$

$$\Rightarrow x = 5$$

$$\text{Vậy } x = 5$$

$$\text{b) } (x-3) + (x-2) + (x-1) + \dots + 10 + 11 = 11$$

$$\Rightarrow (x-3) + (x-2) + (x-1) + \dots + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + \dots + 10 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow [(x-3)+10] + [(x-2)+9] + [(x-1)+8] + \dots + [(-2)+2] + [(-1)+1] + 0 = 0$$

$$\Rightarrow (x+7) + (x+7) + (x+7) + \dots + [(-2)+2] + [(-1)+1] + 0 = 0$$

Ta có vế trái của (1) là tổng các số nguyên liên tiếp viết theo thứ tự tăng dần, khi nhóm như trên, trong từng ngoặc là các cặp số đối nhau $\Rightarrow x+7=0 \Rightarrow x=-7$

$$\text{Vậy } x = -7$$

Bài 5: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $2x + 3y = 14 \quad (1)$

Lời giải: Vì x, y là các số nguyên dương nên $2x, 3y$ cũng là các số nguyên dương

Mặt khác $2x + 3y = 14$ nên $0 < 2x < 14; 0 < 3y < 14$

Vì $y \in \mathbb{Z}, 0 < 3y < 14$ nên $y \in \{1; 2; 3; 4\} \quad (*)$

Lại có $2x + 3y = 14$ mà $2x$ và 14 chẵn nên $3y$ chẵn $\Rightarrow y$ chẵn. Kết hợp với $(*)$ suy ra $y \in \{2; 4\}$

- Nếu $y = 2$ thay vào (1) ta có $2x + 6 = 14 \Rightarrow x = 4$

- Nếu $y = 4$ thay vào (1) ta có $2x + 12 = 14 \Rightarrow x = 1$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là $(4; 2); (1; 4)$

Bài 6: Tìm các số nguyên x, y, z biết $x + y = 2, y + z = 3, z + x = -5$

Lời giải:

Ta có $x + y = 2, y + z = 3, z + x = -5 \Rightarrow (x + y) + (y + z) + (z + x) = 2 + 3 + (-5) \Rightarrow 2x + 2y + 2z = 0$

$$\Rightarrow x + y + z = 0$$

+) Vì $x + y + z = 0$ và $x + y = 2$ nên suy ra $z = 0 - (x + y) = 0 - 2 = -2$

+) Vì $x + y + z = 0$ và $y + z = 3$ nên suy ra $x = 0 - (y + z) = 0 - 3 = -3$

+) Vì $x + y + z = 0$ và $z + x = -5$ nên suy ra $y = 0 - (z + x) = 0 - (-5) = 5$

$$\text{Vậy } x = -3, y = 5, z = -2$$

Bài 7: Tìm các số nguyên x, y, z biết $x - y = 2011, y - z = -2012, z + x = 2013$

Lời giải:

Ta có $x - y = 2011$, $y - z = -2012$, $z + x = 2013 \Rightarrow (x - y) + (y - z) + (z + x) = 2011 + (-2012) + 2013$

$$\Rightarrow x - y + y - z + z + x = 2012 \Rightarrow 2x = 2012 \Rightarrow x = 1006$$

+) Vì $x - y = 2011$, $x = 1006$ nên suy ra $y = x - 2011 = 1006 - 2011 = -1005$

+) Vì $y - z = -2012$, $y = -1005$ nên suy ra $z = y - (-2012) = -1005 - (-2012) = 1007$

Vậy $x = 1006$, $y = -1005$, $z = 1007$

Bài 8: Tìm các số nguyên x , y thỏa mãn $(x + 3)^{2020} + (y - 2)^{2020} = 0$

Lời giải:

Ta có $(x + 3)^{2020} \geq 0$; $(y - 2)^{2020} \geq 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$

Lại có $(x + 3)^{2020} + (y - 2)^{2020} = 0$ nên suy ra $\begin{cases} (x + 3)^{2020} = 0 \\ (y - 2)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy $x = -3$, $y = 2$

Bài 9: Cho 10 ô liên tiếp sau:

	-1					-2			
--	----	--	--	--	--	----	--	--	--

Hãy điền số vào các ô trống để tổng 3 số ở các ô liên tiếp bất kỳ đều bằng 6.

Lời giải:

Gọi 4 số ở 4 ô liên tiếp bất kỳ là x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 .

Vì tổng 3 số ở các ô liên tiếp bằng nhau nên ta có $x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 \Rightarrow x_1 = x_4$. Như vậy các số cách nhau 2 ô thì bằng nhau, vậy ta điền được như sau:

-2	-1		-2	-1		-2	-1		-2
----	----	--	----	----	--	----	----	--	----

Vì tổng 3 số ở các ô liên tiếp bất kỳ đều bằng 6 nên suy ra số ở các ô còn lại là 9.

-2	-1	9	-2	-1	9	-2	-1	9	-2
----	----	---	----	----	---	----	----	---	----

Bài 10: Cho bảng vuông 3×3 ô. Có thể điền được hay không chín số nguyên vào chín ô của bảng sao cho

tổng các số ở ba dòng lần lượt bằng 5; -3; 2 và tổng các số ở ba cột lần lượt bằng -1; 2; 2?

Lời giải:

Không thể điền được như vậy, vì không có 9 số nào mà cộng theo các dòng được $5 + (-3) + 2 = 4$, cộng theo các cột được $(-1) + 2 + 2 = 3$.

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.**Bài 1: Tính:**

$$S = 1 + 2 + 3 - 4 - 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 + 11 + 12 + 13 - 14 - 15 + \dots + 2011 + 2012 + 2013 - 2014 - 2015$$

Lời giải:

$$S = 1 + 2 + 3 - 4 - 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 + 11 + 12 + 13 - 14 - 15 + \dots + 2011 + 2012 + 2013 - 2014 - 2015$$

$$= 1 + 2 + [(3 - 4 - 5 + 6 + 7) + (8 - 9 - 10 + 11 + 12) + (13 - 14 - 15 + 16 + 17) + \dots + (2008 - 2009 - 2010 + 2011 + 2012)] + 2013 - 2014 - 2015$$

$$= 1 + 2 + (7 + 12 + 17 + \dots + 2012) + 2013 - 2014 - 2015$$

$$= 1 + 2 + 2013 - 2014 - 2015 + (7 + 12 + 17 + \dots + 2012)$$

$$= -2013 + (7 + 12 + 17 + \dots + 2012)$$

$$\text{Đặt } T = 7 + 12 + 17 + \dots + 2012$$

$$\text{Số các số hạng của } T \text{ là: } (2012 - 7) : 5 + 1 = 402$$

$$\text{Tổng là: } T = (2012 + 7) \cdot 402 : 2 = 405819$$

$$\text{Vậy } S = -2013 + T = -2013 + 405819 = 403806$$

Bài 2: Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100) \cdot (68.8686 - 86.6868)$$

$$\text{b) } B = 1 + (-2) + (-3) + 4 + 5 + (-6) + (-7) + 8 + \dots + 2017 + (-2018) + (-2019)$$

Lời giải:

$$\text{a) } A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100) \cdot (68.8686 - 86.6868)$$

$$= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100) \cdot (68.86.101 - 86.68.101)$$

$$= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100) \cdot 0$$

$$= 0$$

$$\text{b) } B = 1 + (-2) + (-3) + 4 + 5 + (-6) + (-7) + 8 + \dots + 2017 + (-2018) + (-2019)$$

$$= [1 + (-2) + (-3) + 4] + [5 + (-6) + (-7) + 8] + \dots + [2013 + (-2014) + (-2015) + 2016] + 2017 + (-2018) + (-2019) \quad (1)$$

Từ 1 đến 2016 có 2016 số, nhóm 4 số vào một nhóm ta được 504 nhóm, mỗi nhóm ở (1) có tổng bằng 0, vậy ta có:

$$B = 0.504 + 2017 + (-2018) + (-2019) = -2020$$

Bài 3: Tính $S = (2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2020) - (3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2023)$

Lời giải:

$$\begin{aligned} S &= (2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2020) - (3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2023) \\ &= 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2020 - 3 - 5 - 7 - 9 - \dots - 2023 \\ &= 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + \dots + 2020 - 2021 - 2022 - 2023 \\ &= (2 - 3) + (4 - 5) + (6 - 7) + (8 - 9) + \dots + (2020 - 2021) - 2022 - 2023 \quad (*) \end{aligned}$$

Từ 2 đến 2021 có $2021 - 2 + 1 = 2020$ số, nhóm hai số vào một nhóm ta được 1010 nhóm, ở (*) mỗi nhóm có giá trị bằng (-1) .

$$\text{Vậy } S = (-1).1010 - 2022 - 2023 = -5055$$

Bài 4: Tính:

- a) $A = 13 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 - 6 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1$
 b) $B = 2 - 4 - 6 + 8 + 10 - 12 - 14 + \dots - 2014 + 2016 + 2018 - 2020$

Lời giải:

- a) $A = 13 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 - 6 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1$
 $= 13 - (12 - 11 - 10 + 9) + (8 - 7 - 6 + 5) - (4 - 3 - 2 + 1)$
 $= 13 - 0 + 0 - 0$
 $= 13$
 b) $B = 2 - 4 - 6 + 8 + 10 - 12 - 14 + \dots - 2014 + 2016 + 2018 - 2020$
 $= 2 - 4 - 6 + 8 + 10 - 12 - 14 + 16 + \dots + 2010 - 2012 - 2014 + 2016 + 2018 - 2020$
 $= (2 - 4 - 6 + 8) + (10 - 12 - 14 + 16) + \dots + (2010 - 2012 - 2014 + 2016) + 2018 - 2020$

Dãy các số $2; 4; 6; 8; \dots; 2016$ có $(2016 - 2) : 2 + 1 = 1008$ số hạng, khi nhóm 4 số vào một nhóm ta được 252 nhóm.

$$\text{Ta có } B = (2 - 4 - 6 + 8) + (10 - 12 - 14 + 16) + \dots + (2010 - 2012 - 2014 + 2016) + 2018 - 2020$$

$$= 0 + 0 + \dots + 0 + 2018 - 2020$$

$$= -2$$

Bài 5: Tính:

a) $S = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \dots (-1)^{2021}$

b) $T = 2^{100} - 2^{99} - 2^{98} - \dots - 2^2 - 2 - 1$

Lời giải:

a) $S = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \dots (-1)^{2021}$

$$S = (-1)^{1+2+3+4+\dots+2021}$$

Tính $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2021$

Tổng A có 2021 số hạng.

$$A = (2021 + 1) \cdot 2021 : 2 = 2043231$$

Vậy $S = (-1)^{2043231} = -1$

b) $T = 2^{100} - 2^{99} - 2^{98} - \dots - 2^2 - 2 - 1$

$$= 2^{100} - (2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$$

Đặt $B = 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1$

Ta có $2B = 2 \cdot (2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1) = 2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2$

$$\Rightarrow 2B - B = (2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2) - (2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$$

$$\Rightarrow B = 2^{100} - 1$$

Vậy $T = 2^{100} - B = 2^{100} - (2^{100} - 1) = 1$

Bài 6: Cho $A = 2 - 5 + 8 - 11 + \dots + 98 - 101$. Viết dạng tổng quát các số hạng của A. Tính A.

Lời giải:

Ta có $A = 2 - 5 + 8 - 11 + \dots + 98 - 101$

$$= 2 + (-5) + 8 + (-11) + \dots + 98 + (-101)$$

Trong tổng A, các số hạng ở vị trí lẻ mang dấu "+", các số hạng ở vị trí chẵn mang dấu "-"; phần số tự nhiên của các số hạng này lập thành dãy cộng: 2; 5; 8; 11; ...; 98; 101 (1)

Các số hạng của dãy (1) đều chia 3 dư 2 nên có dạng tổng quát là $3n + 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Từ quy luật về dấu của các số hạng của A ta suy ra dạng tổng quát cho các số hạng của A là $(-1)^n \cdot (3n+2)$ với $n \in \mathbb{N}$.

* Tính A

$$\begin{aligned} A &= 2 + (-5) + 8 + (-11) + \dots + 98 + (-101) \\ &= [2 + (-5)] + [8 + (-11)] + \dots + [98 + (-101)] \quad (2) \end{aligned}$$

Vì dãy $2; 5; 8; \dots; 101$ có $(101-2):3+1=34$ số hạng $\Rightarrow$ tổng A cũng có 34 số hạng, nhóm 2 số vào một nhóm ta có 17 nhóm, mỗi nhóm có tổng bằng (-3)

$$\text{Vậy } A = 17 \cdot (-3) = -51$$

Bài 7: Chứng tỏ rằng số $M = 0,8 \cdot (1983^{1983} - 1917^{1917})$ là số nguyên.

Lời giải:

$$\text{Ta có } 1983^{1983} = 1983^{4 \cdot 495 + 3} = 1983^{4 \cdot 495} \cdot 1983^3 = (1983^4)^{495} \cdot 1983^3 = \overline{...1...7} = \overline{...7}$$

$$1917^{1917} = 1917^{4 \cdot 479 + 1} = 1917^{4 \cdot 479} \cdot 1917^1 = (1917^4)^{479} \cdot 1917^1 = \overline{...1...7} = \overline{...7}$$

Suy ra $1983^{1983} - 1917^{1917}$ có chữ số tận cùng là 0 $\Rightarrow M$ là số nguyên.

Bài 8: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $(x+1)^{2n} + (y-1)^{2n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Lời giải:

$$\text{Ta có } (x+1)^{2n} \geq 0 \text{ và } (y-1)^{2n} \geq 0 \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{Z}; (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Lại có } (x+1)^{2n} + (y-1)^{2n} = 0 \text{ nên suy ra } \begin{cases} (x+1)^{2n} = 0 \\ (y-1)^{2n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ y-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = -1, y = 1$$

Bài 9: Tìm các số nguyên x và y biết $(x-2)(xy-1) = 5$

Lời giải: Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x-2; xy-1 \in \mathbb{Z}$.

Lại có $(x-2)(xy-1) = 5$ mà $5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)$ nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{+) TH1: } \begin{cases} x-2=1 \\ xy-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3y-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

$$+) \text{ TH2: } \begin{cases} x-2=5 \\ xy-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ 7y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{2}{7} \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$+) \text{ TH3: } \begin{cases} x-2=-1 \\ xy-1=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y-1=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$+) \text{ TH4: } \begin{cases} x-2=-5 \\ xy-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ -3y-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là: $(3; 2), (1; -4), (-3; 0)$.

Bài 10: Tìm số nguyên dương a, b, c biết $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ và $a^2 = 2(b+c)$

Lời giải:

$$\text{Do } a^2 = 2(b+c) \Rightarrow a^2 : 2 \Rightarrow a : 2 \quad (1)$$

Mà a là số nguyên dương nên từ $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc > 0 \Rightarrow a > b, a > c$

$$\text{Do } a > b, a > c \Rightarrow 2a > b+c \Rightarrow 4a > 2(b+c)$$

$$\text{mà } a^2 = 2(b+c) \Rightarrow 4a > a^2 > 0 \Rightarrow a < 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 2$.

Do $a^2 = 2(b+c)$ và $a = 2$ nên $b+c = 2^2 : 2 = 2$, lại có b, c nguyên dương nên suy ra $b = c = 1$

Thử lại với $a = 2; b = c = 1$ có $a^3 - b^3 - c^3 = 2^3 - 1^3 - 1^3 = 6; 3abc = 3.2.1.1 = 6 \Rightarrow a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$

Vậy $a = 2, b = 1, c = 1$.

☞ HẾT ☞

CHUYÊN ĐỀ SỐ NGUYÊN**CHỦ ĐỀ 2: BỘI VÀ ƯỚC CỦA SỐ NGUYÊN****PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****A. Các định nghĩa****1. Ước và Bội của một số nguyên**

Với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$. Nếu có số nguyên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b . Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a .

2. Nhận xét

- Nếu $a = bq$ thì ta nói a chia cho b được q và viết $a : b = q$
- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.
- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

3. Liên hệ phép chia có dư với phép chia hết.

Nếu số tự nhiên a chia cho số tự nhiên b được số dư là k thì số $(a - k) : b$

4. Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Ước chung của các số a, b, c được kí hiệu là $ƯC(a, b, c)$.

5. Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

Bội chung của các số a, b, c được kí hiệu là: $BC(a, b, c)$.

6. Ước chung lớn nhất. Bội chung nhỏ nhất

- Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.
- Bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác không trong tập hợp các bội chung của các số đó.

B. Các tính chất

- $(a, 1) = 1; [a, 1] = a$.

- Nếu $a : b \Rightarrow (a, b) = b; [a, b] = a$.

- Nếu a, b nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow (a, b) = 1; [a, b] = a.b$

- $ƯC(a, b) = U(ƯCLN(a, b))$ và $BC(a, b) = B(BCNN(a, b))$

- Nếu $(a, b) = d; \begin{cases} a = dm \\ b = dn \end{cases} \Rightarrow (m, n) = 1$; Ví dụ: $(10, 15) = 5; \begin{cases} 10 = 2.5 \\ 15 = 3.5 \end{cases} \Rightarrow (2, 3) = 1$.

- Nếu $[a, b] = c; \begin{cases} c = am \\ c = bn \end{cases} \Rightarrow (m, n) = 1$; Ví dụ: $[10, 15] = 30; \begin{cases} 30 = 10.3 \\ 30 = 15.2 \end{cases} \Rightarrow (2, 3) = 1$.

- $ab = (a, b).[a, b]$.
- Nếu a là ước của b thì $-a$ cũng là ước của b .
- Nếu a là bội của b thì $-a$ cũng là bội của b .

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Tìm ước và bội của một số nguyên.

Dạng 2: Tìm số nguyên n để thỏa mãn điều kiện chia hết (hoặc thỏa mãn số đã cho là số nguyên).

Dạng 3: Phương trình ước

Dạng 1: Tìm ước và bội của một số nguyên.

I. Phương pháp giải

- Từ việc tìm ước và bội của một số tự nhiên suy ra ước và bội của một số nguyên.
- Chú ý: Nếu a là ước của b thì $-a$ cũng là ước của b . Nếu a là bội của b thì $-a$ cũng là bội của b .

II. Bài toán

Bài 1: Tìm 5 bội của 3; -3 .

Lời giải:

5 bội của 3 là: 0; 3; -3 ; 6; -6 .

5 bội của -3 là: 0; 3; -3 ; 6; -6 .

Bài 2: Tìm tất cả các ước của -3 ; 6; 11; -1 .

Lời giải:

$U(-3) = \{\pm 1; \pm 3\}$. $U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$. $U(11) = \{\pm 1; \pm 11\}$. $U(-1) = \{\pm 1\}$.

Bài 3:

Cho hai tập hợp số $A = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ và $B = \{21; 22; 23\}$.

- Có thể lập được bao nhiêu tổng dạng $(a + b)$ với $a \in A$ và $b \in B$?
- Trong các tổng trên có bao nhiêu tổng chia hết cho 2?

Lời giải:

a) Số các nhiều tổng dạng $(a + b)$ với $a \in A$ và $b \in B$ là $5.3 = 15$ tổng.

b) Số các tổng chia hết cho 2 là: $3.1 + 2.2 = 7$ tổng.

Bài 4:

Điền số vào ô trống cho đúng:

x	36		3	-34	0	11
y	-3	-7		-17	-50	-1
$x : y$		7	-1			

Lời giải:

x	36	-49	3	-34	0	11
y	-3	-7	-3	-17	-50	-1
$x : y$	-12	7	-1	2	0	-11

Bài 5:

1) Cho $A = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$

a) Tính A

b) A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 không ?

c) A có bao nhiêu ước tự nhiên ? Bao nhiêu ước nguyên ?

2) Thay a, b bằng các chữ số thích hợp sao cho $\overline{24a68b} : 45$

3) Cho a là một số nguyên có dạng $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$. Hỏi a có thể nhận những giá trị nào trong các giá trị sau:

$a = 11; a = 2002; a = 2003; a = 11570; a = 22789; a = 29563; a = 299537$

Lời giải:

1a) $A = -50$

1b) $A : 2$ cho 5, A không chia hết cho 3

1c) A có 6 ước tự nhiên và có 12 ước nguyên.

2) Ta có: $45 = 9.5$ mà $(5, 9) = 1$

Do $\overline{24a68b} : 45$ suy ra $\overline{24a68b} : 5 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 5 \end{cases}$

Th1: $b = 0$ ta có số $\overline{24a680}$

Để $\overline{24a680} : 9$ thì $(2 + 4 + a + 6 + 8 + 0) : 9 \Rightarrow a + 20 : 9 \Rightarrow a = 7$

Th2: $b = 5$ ta có số $\overline{24a685}$

Để $\overline{24a685} : 9$ thì $(2 + 4 + a + 6 + 8 + 5) : 9$ hay $a + 25 : 9 \Rightarrow a = 2$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 7, b = 0 \\ a = 2, b = 5 \end{cases}$$

3) Số nguyên có dạng $a = 3b + 7 (b \in \mathbb{Z})$ hay a là số chia 3 dư 1

Vậy a có thể nhận những giá trị là $a = 2002; a = 22789; a = 29563$

Dạng 2: Tìm số nguyên n để thỏa mãn điều kiện chia hết (hoặc thỏa mãn số đã cho là số nguyên).

I. Phương pháp giải

Tìm số $n (n \in \mathbb{Z})$ để số A chia hết cho số B hoặc $\frac{A}{B}$ là số nguyên, trong đó A, B là các số phụ thuộc vào số n .

- Viết số A dưới dạng $A = kB + m (k, m \in \mathbb{Z})$

- Lập luận:

+ Vì kB chia hết cho B , nên để A chia hết cho B thì số m phải chia hết cho B hay B là ước của m .

+ Giải điều kiện B là ước của số m , ta tìm được n .

II. Bài toán

Bài 1: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n + 8) : (n + 1)$

Lời giải:

Ta có: $3n + 8 = 3n + 3 + 5 = 3(n + 1) + 5$

Suy ra: $(3n + 8) : (n + 1)$ khi $(n + 1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$.

Vậy $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$.

Bài 2: Tìm số nguyên n để $(n^2 + 3n + 6) : (n + 3)$

Lời giải:

Ta có $n^2 + 3n + 6 = n(n + 3) + 6$

Vì $n(n+3):(n+3)$, nên để $(n^2+3n+6):(n+3)$ thì $6:(n+3)$

Mà $n \in \mathbb{Z}$ nên $(n+3)$ là ước của 6

$$\Rightarrow (n+3) \in \{\pm 3; \pm 6\} \Rightarrow n \in \{0; -6; 3; -9\}$$

Vậy $n \in \{0; -6; 3; -9\}$ thì $(n^2+3n+6):(n+3)$

Bài 3: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải:

Ta có $\frac{n+1}{n-2}$ là một số nguyên khi $(n+1):(n-2)$

Ta có $n+1 = (n-2)+3$, do đó $(n+1):(n-2)$ khi $3:(n-2)$

$\Rightarrow (n-2)$ là ước của 3

$$\Rightarrow (n-2) \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

Vậy $n \in \{-1; 1; 3; 5\}$ thì $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 4: Tìm số nguyên n để $5+n^2-2n$ chia hết cho $n-2$

Lời giải:

Ta có $5+n^2-2n = 5+n(n-2)$

Vì $n(n-2):(n-2)$, nên để $(5+n^2-2n):(n-2)$ thì $5:(n-2)$

$$\Rightarrow (n-2) \text{ phải là ước của } 5 \Rightarrow (n-2) \in \{-5; -1; 1; 5\} \Rightarrow n \in \{-3; -1; 3; 7\}$$

Vậy $n \in \{-3; -1; 3; 7\}$ thì $5+n^2-2n$ chia hết cho $n-2$

Bài 5: Cho $A = \frac{n-1}{n+4}$. Tìm n nguyên để A là một số nguyên

Lời giải:

Ta có $A = \frac{n-1}{n+4}$ là một số nguyên khi $(n-1):(n+4)$

Ta có $(n-1) = (n+4) - 5$, do đó $(n-1):(n+4)$ khi $5:(n+4)$

$\Rightarrow (n+4)$ phải là ước của 5 $\Rightarrow (n+4) \in \{-5; -1; 1; 5\} \Rightarrow n \in \{-9; -5; -3; 1\}$

Vậy $n \in \{-9; -5; -3; 1\}$ thì A là một số nguyên

Bài 6: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải:

Ta có $\frac{4n+5}{2n-1}$ là một số nguyên khi $(4n+5):(2n-1)$

Ta có $4n+5 = 2(2n-1) + 7$, do đó $(4n+5):(2n-1)$ khi $7:(2n-1)$

$\Rightarrow (2n-1)$ là ước của 7 $\Rightarrow 2n-1 \in \{-7; -1; 1; 7\} \Rightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Vậy $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$ thì $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Bài 7: Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $A = \frac{3n+2}{n-1}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải:

Ta có $A = \frac{3n+2}{n-1} = \frac{3n-3+5}{n-1} = \frac{3(n-1)+5}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1}$

Để A có giá trị nguyên thì $\frac{5}{n-1}$ nguyên.

Mà $\frac{5}{n-1}$ nguyên khi $5:(n-1)$ hay $n-1$ là ước của 5

Do $U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta tìm được $n = 2; n = 0; n = 6; n = -4$.

Bài 8: Cho phân số: $A = \frac{n-5}{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}; n \neq -1$)

- a) Tìm n để A có giá trị nguyên
b) Tìm n để A là phân số tối giản

Lời giải:

a) $A = \frac{n-5}{n+1} = \frac{n+1-6}{n+1} = 1 - \frac{6}{n+1}$

A nhận giá trị nguyên $n+1 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$.

$n+1$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
n	0	-2	1	-3	2	-4	5	-7

b) A tối giản $\Leftrightarrow (n+1, n-5) = 1 \Leftrightarrow (n+1, 6) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n+1$ không chia hết cho 2 và $n+1$ không chia hết cho 3 $n \neq 2k-1$ và $n \neq 3k-1$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 9:

a) Tìm hai số tự nhiên a và b biết $BCNN(a, b) = 180$; $UCLN(a, b) = 12$

b) Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số $A = \frac{4n-1}{2n+3}$ có giá trị nguyên.

Lời giải:

a) Ta có $ab = 180.12 = 2160$

Giả sử $a \leq b$. Vì $UCLN(a, b) = 12$ nên $a = 12m, b = 12n$ với $(m, n) = 1$ và $m \leq n$

Suy ra $12m.12n = 2160 \Rightarrow mn = 15$. Ta có bảng sau:

m	n	a	b
1	15	12	180
3	5	36	60

Vậy ta có hai cặp $(a; b)$ là $(12; 180), (36; 60)$.

b) $A = \frac{4n-1}{2n+3} = \frac{2(2n+3)}{2n+3} - \frac{7}{2n+3} = 2 - \frac{7}{2n+3}$

A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2n+3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$.

Ta có bảng sau

$2n+3$	1	-1	7	-7
n	-1	-2	2	-5

Vậy $n \in \{-1; -2; 2; -5\}$

Bài 10: Cho $A = \frac{12n+1}{2n+3}$. Tìm giá trị của n để:

- a) A là một phân số b) A là một số nguyên

Lời giải:

a) $A = \frac{12n+1}{2n+3}$ là phân số khi $12n+1 \in \mathbb{Z}, 2n+3 \in \mathbb{Z}, 2n+3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1, 5 \end{cases}$

b) $A = \frac{12n+1}{2n+3} = 6 - \frac{17}{2n+3}$

A là số nguyên khi $2n+3 \in U(17) \Leftrightarrow 2n+3 \in \{\pm 1; \pm 17\} \Leftrightarrow n \in \{-10; -2; -1; 7\}$

Bài 11:

- a) Tìm giá trị n là số tự nhiên để $n+7$ chia hết cho $n+2$
 b) Tìm x là số chia trong phép chia 235 cho x được số dư là 14

Lời giải:

a) $(x+7):(x+2) \Leftrightarrow 5:(x+2) \Leftrightarrow (x+2) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

$\Rightarrow x \in \{-3; -1; -7; 3\}$.

b) $235 : x$ dư 14 $\Rightarrow 235 - 14 : x (x > 14)$

$\Rightarrow 221 : x (x > 14) \Rightarrow x \in \{17; 221\}$

Bài 12: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ biết: $(3n+8):(n+1)$

Lời giải:

Ta có: $3n + 8 = 3n + 3 + 5 = 3(n + 1) + 5$

Suy ra : $(3n + 8) : (n + 1)$ khi $(n + 1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Tìm được: $n \in \{-6; -2; 0; 4\}$

Bài 13:

a) Cho $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$. Chứng minh $\overline{abc deg} : 7$

b) Tìm số nguyên n sao cho $n^2 + 1 : n + 1$

Lời giải:

a) Ta có: $\overline{abc deg} = 1000.\overline{abc} + \overline{deg}$

$$= (1001 - 1)\overline{abc} + \overline{deg} = 1001\overline{abc} - \overline{abc} + \overline{deg} = 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{deg})$$

$$\text{Vì } 1001\overline{abc} = 7.143\overline{abc} \Rightarrow 7.143.\overline{abc} : 7 \quad (1)$$

$$\overline{abc} - \overline{deg} : 7 \text{ (gt)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{abc deg} : 7$

b) Ta có:

$$n^2 + 2 = n(n + 1) + [-(n + 1)] + 3$$

Vì $n(n + 1) : n + 1$ và $-(n + 1) : n + 1$

Để $n^2 + 2 : n + 1$ thì $3 : n + 1 \Rightarrow n + 1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-2; 0; -4; 2\}$.

Bài 14:

a) Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$. Chứng minh A chia hết cho 11 và 13.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$.

Lời giải:

a) A có 90 số hạng mà $90 : 5$ nên $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{90}$

$$A = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}) + \dots + (3^{86} + 3^{87} + 3^{88} + 3^{89} + 3^{90})$$

$$= 3.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^6.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{86}.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$= 121.(3 + 3^6 + \dots + 3^{86}) : 11 \Rightarrow A : 11$$

A có 90 số hạng mà $90 : 3$ nên:

$$A = (3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6) + \dots + (3^{88} + 3^{89} + 3^{90})$$

$$= 3.(1 + 3 + 3^2) + 3^4.(1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{88}.(1 + 3 + 3^2)$$

$$= 13.(3 + 3^4 + \dots + 3^{88}) : 13 \Rightarrow A : 13$$

$$b) xy - 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(y - 2) = -3 = 1.(-3) = (-3).1$$

$$\text{Từ đó suy ra } (x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$$

Bài 15: Tìm tất cả các số nguyên n để:

a) Phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

b) Phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản

Lời giải:

a) $\frac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1) : (n-2)$

Ta có: $n+1 = (n-2) + 3$, vậy $(n+1) : (n-2)$ khi $3 : (n-2)$

$$(n-2) \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

b) Gọi d là ƯC của $12n+1$ và $30n+2$ ($d \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow 12n+1 : d, 30n+2 : d$

$$[5(12n+1) - 2(30n+2)] : d \Leftrightarrow (60n+5 - 60n-4) : d \Leftrightarrow 1 : d$$

$$\text{mà } d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số đã cho tối giản

Bài 16: Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải:

$$a) M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-5 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{2; 4; 6; 8\}$$

Bài 17: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là nguyên thì $n+3 : 2n-2$

$$\Rightarrow 2(n+3) : 2n-2$$

$$\Rightarrow (2n+6) - (2n-2) : (2n-2)$$

$$\Rightarrow (2n-2n) + (6+2) : 2n-2 \Rightarrow 8 : 2n-2$$

$$\text{Suy ra } (2n-2) \in \{\pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Sau khi thử các trường hợp $\Rightarrow n = 5$.

Bài 18: Cho $A = \frac{3n-5}{n+4}$, tìm $n \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Lời giải:

$$\text{Ta có } A = \frac{3n-5}{n+4} = 3 + \frac{-17}{n+4}$$

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z} \Rightarrow (n+4) \in U(-17) = \{\pm 1; \pm 17\}.$$

Lập bảng và xét các giá trị ta có $n \in \{-5; -3; 21; 13\}$ thì A nguyên.

Dạng 3: Phương trình ước

I. Phương pháp giải

- Tìm cặp số nguyên x, y thỏa mãn $P(x, y) = m$ ta đưa về dạng $A(x, y) \cdot B(x, y) = m$ từ đó suy ra $A(x, y); B(x, y)$ là các ước của m suy ra giá trị của x, y .

II. Bài toán

Bài 1: Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$

Lời giải:

$$\begin{aligned} xy - 2x + y + 1 = 0 &\Leftrightarrow x(y - 2) + (y - 2) \\ &= -3 \Leftrightarrow (x + 1)(y - 2) = -3 = 1 \cdot (-3) = (-3) \cdot 1 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $(x; y) \in \{(0; -1); (-4; 3)\}$.

Bài 2: Tìm x, y nguyên biết: $x + y + xy = 40$

Lời giải:

$$(y + 1)x + y + 1 = 41 \Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) = 41 = 1 \cdot 41 = 41 \cdot 1 = -1 \cdot (-41) = -41 \cdot (-1).$$

Sau khi lập bảng ta thu được:

$$(x; y) \in \{(40; 0); (0; 40); (-2; -42); (-42; -2)\}$$

Bài 3: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $2x + 3y = 14$

Lời giải:

$$\text{Xét } 2x + 5y = 14 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } 14 : 2; 2x : 2 \Rightarrow 5y : 2 \Rightarrow y : 2$$

$$\text{Ta có } 5y < 14 \Rightarrow y < 14 : 5 \Rightarrow y \leq 2, \text{ mà } y \text{ chẵn nên } y = 2$$

$$\text{Thay vào (1)} \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Vậy } x = 2; y = 2$$

Bài 4: Tìm số tự nhiên x, y biết: $(2x + 1)(y - 3) = 12$

Lời giải:

$$a) (2x + 1)(y - 3) = 12 = 1 \cdot 12 = 3 \cdot 4 \text{ (do } 2x + 1 \text{ lẻ)}$$

$$2x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 15$$

$$2x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 4$$

Bài 5: Tìm các số nguyên x, y sao cho: $(x+1)(xy-1)=3$

Lời giải:

Vì $(x+1)(xy-1)=3, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{Z}, xy-1 \in \mathbb{Z}$

Do đó, $x+1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

Ta có:

$x+1$	1	-1	3	-3
$xy-1$	3	-3	1	-3
x	0	-2	2	-4
y	ktm	1	1	0

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là: $(-2; 1); (2; 1); (-4; 0)$

Bài 6: Tìm các số nguyên a, b biết rằng: $\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3}$

Lời giải:

$$\frac{a}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b+3} \Rightarrow \frac{2a-7}{14} = \frac{1}{b+3} \Rightarrow (2a-7)(b+3)=14$$

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $2a-7 \in U(14)$

Vì $2a-7$ lẻ nên $2a-7 \in \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow a \in \{0; 3; 4; 7\}$

Vậy $(a; b) = \{(0; -5); (3; -17); (4; 11); (7; -1)\}$

Bài 7: Tìm các số nguyên x, y sao cho $(x-1)(3-y)=2$

Lời giải:

Ta có: $(x-1)(3-y)=2=2.1=1.2=(-2).(-1)=(-1).(-2)$

Sau khi lập bảng, ta có các trường hợp:

$(x, y) \in \{(0; 5), (-1; 4), (3; 2), (2; 1)\}$.

Bài 8: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $(x+1)(2y-5)=8$

Lời giải:

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2y - 5 \in U(8)$ mà $2y - 5$ lẻ nên

$$\begin{cases} 2y - 5 = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 7 \\ 2y - 5 = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -9 \end{cases}$$

Bài 9: Tìm các số nguyên x, y biết rằng: $(x - 2)(xy - 1) = 5$

Lời giải:

Ta có: $(x - 2)(xy - 1) = (-1) \cdot (-5) = 1 \cdot 5$

Lập bảng và thử các trường hợp ta được: $(x; y) = \{(1; -4); (-3; 0); (3; 2)\}$

Bài 10: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho: $\frac{x}{9} - \frac{3}{y} = \frac{1}{18}$

Lời giải:

$$\text{Từ: } \frac{x}{9} - \frac{3}{y} = \frac{1}{18} \Leftrightarrow \frac{x}{9} - \frac{1}{18} = \frac{3}{y} \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{18} = \frac{3}{y}$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)y = 54 = 1 \cdot 54 = 2 \cdot 27 = 3 \cdot 18 = 6 \cdot 9$$

Vì x là số tự nhiên nên $2x - 1$ là ước số lẻ của 54.

$2x - 1$	1	3	9	27
x	1	2	5	14
y	54	18	6	2

Vậy $(x; y) = (1; 54); (2; 18); (5; 6); (14; 2)$

Bài 11: Tìm số nguyên x và y , biết: $xy - x + 2y = 3$

Lời giải:

$$xy - x + 2y = 3 \Rightarrow (xy - x) + (2y - 2) = 1$$

$$\Rightarrow x(y - 1) + 2(y - 1) = 1 \Rightarrow (y - 1)(x + 2) = 1$$

$$*) \begin{cases} y - 1 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} y-1=-1 \\ x+2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy $x = -1; y = 2$ hoặc $x = -3; y = 0$

Bài 12: Tìm các số tự nhiên x, y sao cho $(2x+1)(y-5) = 12$

Lời giải:

Ta có: $2x+1; y-5 \in U(12) = 1.12 = 2.5 = 3.4$

$$\text{Do } 2x+1 \text{ lẻ} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=1 \Rightarrow x=0; y=17 \\ 2x+1=3 \Rightarrow x=1; y=9 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (0, 17); (1, 9)$

Bài 13: Tìm x, y nguyên biết: $2x(3y-2) + (3y-2) = -55$

Lời giải:

$$2x(3y-2) + (3y-2) = -55$$

$$\Rightarrow (3y-2)(2x+1) = -55$$

Ta có bảng sau:

$3y-2$	-1	-55	-5	-11
$2x+1$	55	1	11	5
x	27	0	5	2
y	$\frac{1}{3}(KTM)$	$\frac{-53}{3}(KTM)$	-1	-3

Vậy ta có các cặp $(x; y)$ là $(5; -1), (2; -3)$.

Bài 14: Tìm các số nguyên x, y sao cho : $xy - 2x - y = -6$

Lời giải:

$$xy - x - y = -6 \Leftrightarrow (x-1)(y-2) = -4 (x, y \in \mathbb{Z})$$

Ta có bảng sau:

$x-1$	-1	1	-2	2	-4	4
$y-2$	4	-4	2	-2	1	-1
x	0	2	-1	3	-3	5
y	6	-2	4	0	3	1

Vậy ta có các cặp $(x; y)$ là $(0; 6), (2; -2), (-1; 4), (3; 0), (-3; 3), (5; 1)$.

Bài 15: Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết $(2y+1)(x-4)=10$

Lời giải:

$$2xy + x - 8y = 14$$

$$\Rightarrow x(2y+1) - 8y - 4 = 14 - 4$$

$$\Rightarrow x(2y+1) - 4(2y+1) = 10$$

$$\Rightarrow (2y+1)(x-4) = 10$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $2y+1 \in \mathbb{Z}, x-4 \in \mathbb{Z}$, suy ra $2y+1, x-4$ là ước nguyên của 10 và $2y+1$ lẻ

Lập bảng

$2y+1$	1	1	5	-5
$x-4$	10	-10	2	-2
x	14	-6	6	2
y	0	-1	2	-3

$$\text{Vậy } \begin{cases} x=14 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=-6 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

Bài 16: Tìm các nguyên tố x, y thỏa mãn : $(x-2)^2 \cdot (y-3) = -4$.

Lời giải:

Do $-4 = 1^2 \cdot (-4) = 2^2 \cdot (-1)$ nên có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} (x-2)^2 = 1 \\ y-3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x-2 = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} (x-2)^2 = 2^2 \\ y-3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x-2 = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Bài 17: Tìm các số $x, y \in N$ biết: $(x+1) + (2y-1) = 12$

Lời giải:

$$(x+1)(2y-1) = 12 = 1.12 = 2.6 = 3.4 = 12.1 = 6.2 = 4.3 ; x, y \in N$$

$$\text{Mà } 2y-1 \text{ là số lẻ} \Rightarrow 2y-1 = 1; 2y-1 = 3$$

$$\text{Với } 2y-1 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ thì } x+1 = 12 \Rightarrow x = 11$$

$$\text{Ta được } x = 11; y = 1$$

$$\text{Với } 2y-1 = 3 \Rightarrow y = 2 \text{ thì } x+1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Ta được } x = 3; y = 2$$

$$\text{Kết luận: với } x = 11; y = 1 \text{ hoặc } x = 3; y = 2 \text{ thì } (x+1)(2y-1) = 12.$$

Bài 18: Tìm số nguyên x, y biết: $\frac{5}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$.

Lời giải:

$$\frac{5}{x} = \frac{1}{6} + \frac{y}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{x} = \frac{1+2y}{6} \Leftrightarrow x(1+2y) = 5.6 = 30 \quad (4) \Rightarrow x, 1+2y \in U(30) \quad (1)$$

$$\text{Mà } U(30) = \{-30; -15; -10; -6; -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\} \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác } 1-2y \text{ là số lẻ} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có bảng sau:

$1+2y$	-15	-5	-3	-1	1	3	5	15
x	-2	-6	-10	-30	30	10	6	2
y	-8	-3	-2	-1	0	1	2	7

Vậy các cặp số nguyên (x, y) cần tìm là:

$(-2; 8); (-6; -3); (-10; 2); (-30; -1); (30; 0); (10; 1); (6; 2); (2; 7);$

Bài 19: Tìm các số tự nhiên x, y , sao cho $(2x+1)(y-5)=12$

Lời giải:

Ta có $2x+1; y-5$ là ước của 12

$$12 = 1.12 = 2.6 = 3.4$$

Do $2x+1$ lẻ $2x+1=1$ hoặc $2x+1=3$

$$\Rightarrow 2x+1=1 \Rightarrow x=0; y-5=12 \Rightarrow y=17$$

$$\text{hoặc } 2x+1=3 \Rightarrow x=1; y-5=4 \Rightarrow y=9$$

Vậy $(x, y) = (0, 17); (1, 9)$

Bài 20:

a) Cho số $\overline{abc}$ chia hết cho 37. Chứng minh rằng số $\overline{cab}$ cũng chia hết cho 37

b) Tìm số x, y nguyên biết $xy+12=x+y$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } \overline{abc}:37 \Rightarrow 100.\overline{abc}:37 \Rightarrow \overline{abc00}:37$$

$$\Rightarrow (\overline{ab.1000} + \overline{c00}):37$$

$$\Rightarrow [\overline{ab.999} + (\overline{c00} + \overline{ab})]:37$$

$$\Rightarrow (\overline{ab.999} + \overline{cab}):37$$

$$\text{Mà } \overline{ab.999} = \overline{ab.37.27}:37 \Rightarrow \overline{cab}:37$$

Vậy nếu $\overline{abc}:37$ thì $\overline{cab}:37$

b) Ta có $xy + 12 = x + y \Rightarrow xy - x - y + 12 = 0$

$$\Rightarrow x(y-1) - (y-1) + 11 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) = -11 = -1.11 = 1.(-11) = 11.(-1) = -11.1$$

$x-1$	-11	-1	1	11
$y-1$	1	11	-11	-1
x	-10	0	2	12
y	2	12	-10	0

Vậy $(x; y) \in \{(-10; 2); (0; 12); (2; -10); (12; 0)\}$

Bài 21: Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Lời giải:

$$x = 0, y = 0 \text{ hoặc } x = 2, y = 2$$

Bài 22:

a) Tìm số dư trong phép chia khi chia một số tự nhiên cho 91. Biết rằng nếu lấy số tự nhiên đó chia cho 7 thì được dư là 5 và chia cho 13 được dư là 4

b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1}$

Lời giải:

a) Gọi số tự nhiên đó là a

$$\text{Theo bài ra ta có: } a = 7p + 5; a = 13q + 4 \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

$$\text{Suy ra: } a + 9 = 7p + 14 = 7.(p + 2); 7$$

$$a + 9 = 13q + 13 = 13.(q + 1); 13$$

$$\text{Ta có: } a + 9; 7; a + 9; 13; (7, 13) = 1$$

$$\text{Do đó } a + 9; 91 \Rightarrow a + 9 = 91k \Rightarrow a = 91k - 9 = 91k - 91 + 82 = 91.(k - 1) + 82$$

Nên a chia cho 91 có dư là 82.

$$\text{b) Ta có: } \frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow \frac{x+5}{5} = \frac{1}{y-1} \Leftrightarrow (x+5)(y-1) = 5.1$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(y-1) = 5.1 = 1.5 = -5.(-1) = (-1).(-5)$$

Thay hết tất cả các trường hợp ta có:

$$(x; y) = \{(0; 2); (-4; 6); (-10; 0); (-6; -4)\}.$$

♣ HẾT ♣