

CHUYÊN ĐỀ PHÂN SỐ**CHỦ ĐỀ 1: HỆ THỐNG KIẾN THỨC CƠ BẢN****PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Số có dạng $\frac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ gọi là phân số.

Số nguyên n được đồng nhất với phân số $\frac{n}{1}$.

Tính chất cơ bản của phân số: $\frac{a}{b} = \frac{a.m}{b.m} = \frac{a:n}{b:n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}, m, n \neq 0$ và $n \in \text{ƯC}(a, b)$.

Nếu $(a, b) = 1$ thì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Nếu $\frac{m}{n}$ là dạng tối giản của phân số $\frac{a}{b}$ thì tồn tại số nguyên k sao cho $a = mk, b = nk$.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**Dạng 1: Áp dụng các tính chất chia hết để giải các bài toán về phân số*****I. Phương pháp giải***

Bài toán tổng quát: Tìm số tự nhiên n sao cho $\frac{A(n)}{B(n)}$ có giá trị nguyên.

Cách làm:

$$\frac{A(n)}{B(n)} = \frac{1}{a} \left(b + \frac{d}{C(n)} \right) \quad (a, b, d \in \mathbb{Z}) \Rightarrow C(n) \in \text{Ư}(d).$$

Nếu $a = 1$ ta tìm được n và kết luận.

Nếu $a \neq 1$ ta tìm được n cần thử lại rồi kết luận.

Bài toán tổng quát: Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên n để phân số tối giản hoặc rút gọn được” ta làm như sau:

Gọi d là ước nguyên tố của tử và mẫu.

Dùng các phép toán cộng, trừ, nhân để khử n để từ đó tìm d .

Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên n để phân số tối giản” ta tìm n để tử số hoặc mẫu số không chia hết cho các ước nguyên tố.

Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được” ta tìm n để tử số hoặc mẫu số chia hết cho các ước nguyên tố.

II. Bài toán

Bài 1: Cho $A = \frac{n-1}{n+4}$

- a) Tìm n nguyên để A là một phân số
b) Tìm n nguyên để A là một số nguyên.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

a) Để A là phân số thì $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -4 \end{cases}$

b) Để phân số A có giá trị là một số nguyên thì

$$(n-1) : (n+4) \Rightarrow (n+4-5) : (n+4) \Rightarrow [(n+4)-5] : (n+4)$$

Mà $(n+4) : (n+4)$ nên $5 : (n+4) \Rightarrow n+4 \in U(5)$.

$$U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

Ta có bảng sau:

$n+4$	1	-1	5	-5
n	-3	-5	1	-9
A	-4	6	0	2

Vậy $n \in \{-9; -5; -3; 1\}$.

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{n+10}{2n-8}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Để phân số A có giá trị là một số nguyên thì

$$(n+10):(2n-8) \Rightarrow (n+10):(n-4) \Rightarrow [(n-4)+14]:(n-4) \Rightarrow 14:(n-4).$$

$$\Rightarrow n-4 \in U(14).$$

$$U(14) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14\}.$$

Mặt khác, n là số tự nhiên nên $n-4 \geq -4 \Rightarrow n-4 \in \{-2; -1; 1; 2; 7; 14\}.$

Ta có bảng sau:

$n-4$	1	-1	2	-2	7	14
n	5	3	6	2	11	18
A	$\frac{15}{2}$ (loại)	$\frac{13}{-2}$ (loại)	$\frac{16}{4} = 4$	-3	$\frac{21}{14}$ (loại)	1

Vậy $n \in \{2; 6; 18\}.$

Bình luận:

- Ngoài cách lập bảng trên ta có thể để ý rằng:

$$(n+10):(2n-8) \Rightarrow (n+10):[2(n-4)] \Rightarrow (n+10):2.$$

Kết hợp với $(n-4) \in \{-2; -1; 1; 2; 7; 14\} \Rightarrow n \in \{2; 3; 5; 6; 11; 18\} \Rightarrow n \in \{2; 6; 18\}.$

- Đối với bài toán trên với $n \in \{5; 3; 11\}$ đều là số nguyên nhưng khi thay vào A thì không được giá trị nguyên vì: theo bài ra thì $(n+10):(2n-8) \Rightarrow (n+10):(n-4)$ nhưng không có điều ngược lại.

Bài 3: Chứng minh rằng phân số $\frac{2n+3}{4n+8}$ tối giản với mọi số tự nhiên n .

Phân tích:

Để chứng minh một phân số là phân số tối giản thì ta cần chứng minh ước chung lớn nhất của tử và mẫu phải bằng 1.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Giả sử } \text{ƯCLN}(2n+3, 4n+8) = d \Rightarrow \begin{cases} 2n+3 : d \\ 4n+8 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6 : d \\ 4n+8 : d \end{cases} \Rightarrow 2 : d \Rightarrow d \in \{1; 2\}$$

Vì $2n+3$ là số tự nhiên lẻ nên $\Rightarrow d \neq 2$.

Vậy $d = 1$ nên phân số $\frac{2n+3}{4n+8}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$ rút gọn được.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Gọi d là ước nguyên tố của $21n+3$ và $6n+4$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (21n+3) : d \\ (6n+4) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (42n+6) : d \\ (42n+28) : d \end{cases} \Rightarrow 22 : d \Rightarrow d \in \{2; 11\}.$$

Nếu $d = 2$ ta thấy $(6n+4) : 2 \forall n$ còn $(21n+3) : 2$ khi n lẻ.

Nếu $d = 11$ thì $(21n+3) : 11 \Rightarrow (22n - n + 3) : 11$ hay $22n - (n - 3) \Rightarrow (n - 3) : 11 \Rightarrow n - 3 = 11k$

$\Rightarrow n = 11k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$).

Với $n = 11k + 3$ thì $6n + 4 = 6(11k + 3) + 4 = (66k + 22) : 11 \Rightarrow (6n + 4) : 11$.

Vậy n lẻ hoặc $n = 11k + 3$ thì phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$ rút gọn được.

Bài 5: Tìm các số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho: $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}; \frac{b}{c} = \frac{12}{21}; \frac{c}{d} = \frac{6}{11}$.

Lời giải:

Điều kiện: $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

Ta có:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \\ \frac{b}{c} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \\ \frac{c}{d} = \frac{6}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3m \\ b = 5m = 4n \\ c = 7n = 6k \\ d = 11k \end{cases} \quad (m, n, k \in \mathbb{N}^*).$$

Suy ra $\begin{cases} 4n:5 \\ 7n:6 \end{cases}$ mà $(4,5)=1; (6,7)=1 \Rightarrow \begin{cases} n:5 \\ n:6 \end{cases} \Rightarrow n \in BC(5,6)$ mặt khác a, b, c, d nhỏ nhất nên

$$n = \text{BCNN}(5,6) \Rightarrow n = 5.6 = 30 \Rightarrow m = 24; k = 35.$$

$$\Rightarrow a = 72; b = 120; c = 210; d = 385.$$

Bài 6: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Cách 1:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên thì

$$(n+3):(2n-2) \Rightarrow (n+3):[2(n-1)] \Rightarrow (n+3):(n-1) \Rightarrow [(n-1)+4]:(n-1) \Rightarrow 4:(n-1)$$

Suy ra $n-1$ là ước của 4.

$$U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \text{ mặt khác } n \text{ là số tự nhiên nên } n-1 \geq -1 \text{ nên } n-1 \in \{-1; 1; 2; 4\}$$

Ta có bảng sau:

$n-1$	-1	1	2	4
n	0	2	3	5

$\frac{n+3}{2n-2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{8}=1$
	Loại	Loại		

Vậy $n = 5$ thì phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Cách 2:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên thì

$$(n+3):(2n-2) \Rightarrow 2(n+3):2n-2 \Rightarrow (2n+6):(2n-2) \Rightarrow (2n-2+8):(2n-2) \Rightarrow 8:(2n-2) \Rightarrow 4:(n-1).$$

Suy ra $n-1$ là ước của 4

$U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$ mặt khác n là số tự nhiên nên $n-1 \geq -1$ nên $n-1 \in \{-1; 1; 2; 4\}$

Ta có bảng sau:

$n-1$	-1	1	2	4
n	0	2	3	5
$\frac{n+3}{2n-2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{8}=1$
	(loại)	(loại)		

Vậy $n = 5$ thì phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Cách 3:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên thì

$$(n+3):(2n-2) \Rightarrow (n+3):[2(n-1)] \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ (n+3):(n-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ [(n-1)+4]:(n-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ 4:(n-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ n-1 \in \{\pm 4; \pm 2; \pm 1\} \\ n-1 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ n \in \{5; 3; 2; 0\} \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow n = 5.$$

Vậy $n = 5$ thì phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Bài 7: Tìm số nguyên n sao cho:

a) $\frac{n+7}{3n-1}$ là số nguyên.

b) $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên.

Lời giải:

a) Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{n+7}{3n-1}$ có giá trị là một số nguyên thì

$$(n+7):(3n-1) \Rightarrow 3(n+7):(3n-1) \Rightarrow (3n+21):(3n-1) \Rightarrow (3n-1+22):(3n-1).$$

$$\Rightarrow 22:(3n-1) \Rightarrow 3n-1 \in U(22).$$

$$U(22) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 11; \pm 22\}.$$

Ta có bảng sau:

$3n-1$	1	-1	2	-2	11	-11	22	-22
n	$\frac{2}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	0	1	$-\frac{1}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	4	$-\frac{10}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	$\frac{23}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	-7
A		-7	4		1	$-\frac{5}{7}$ (loại)		0

Vậy $n \in \{0; 1; 4; -7\}$ thì $\frac{n+7}{3n-1}$ có giá trị nguyên.

b) Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên thì

$$(3n+2) : (4n-5) \Rightarrow 4(3n+2) : (4n-5) \Rightarrow (12n+8) : (4n-5) \text{ hay } (12n-15+23) : (4n-5).$$

$$\Rightarrow [3(4n-5)+23] : (4n-5)$$

Mà $3(4n-5) : (4n-5)$ nên $23 : (4n-5) \Rightarrow 4n-5 \in U(23)$.

$$U(23) = \{\pm 1; \pm 23\}.$$

Ta có bảng sau:

$4n-5$	1	-1	23	-23
n	$\frac{3}{2}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	1	7	$-\frac{9}{2}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)
A		-5 (loại)	1	0

Vậy $n = 7$ thì $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên.

Bài 8: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$.

- Có giá trị là số tự nhiên.
- Là phân số tối giản.
- Phân số A rút gọn được với $150 < n < 170$.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

a) Để phân số A là số tự nhiên thì

$$(8n+193):(4n+3) \text{ hay } (8n+6+187):(4n+3) \Rightarrow [2(4n+3)+187]:(4n+3)$$

$$\text{Mà } 2(4n+3):(4n+3) \Rightarrow 187:(4n+3) \Rightarrow (4n+3) \in U(187)$$

$$U(23) = \{\pm 11; \pm 17; \pm 187\}.$$

$$\text{Mà } n \text{ là số tự nhiên nên } 4n+3 \geq 0 \text{ hay } n \geq -\frac{3}{4} \text{ suy ra } n \in \{11; 17; 187\}$$

Ta có bảng sau:

$4n+3$	11	17	187
n	2	$\frac{7}{2}$ (loại vì $n \in \mathbb{N}$)	46
A	19		3

$$\text{Vậy } n \in \{2; 46\} \text{ thì } A = \frac{8n+193}{4n+3} \text{ là số tự nhiên.}$$

b) Gọi d là ước nguyên tố của $8n+193$ và $4n+3$ thì:

$$\begin{cases} 8n+193:d \\ 4n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n+193:d \\ 2(4n+3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n+193:d \\ 8n+6:d \end{cases} \Rightarrow [(8n+193)-(8n+6)] : d \Rightarrow 187:d$$

$$\Rightarrow d \in \{11; 17\} \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ và } d \text{ là số nguyên tố.}$$

$$\text{Với } d = 11 \text{ ta có } (4n+3):11 \Rightarrow (4n+3-11):11 \Rightarrow (4n-8):11 \Rightarrow 4(n-2):11 \Rightarrow (n-2):11$$

$$\text{Do đó } n-2 = 11k \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{) hay } n = 11k + 2 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$\text{Với } d = 17 \text{ ta có } (4n+3):17 \Rightarrow (4n+3+17):17 \Rightarrow (4n+20):17 \Rightarrow 4(n+5):17 \Rightarrow (n+5):17$$

$$\text{Do đó } n+5 = 17m \text{ (} m \in \mathbb{N} \text{) hay } n = 17m - 5 \text{ (} m \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

Vậy với $n \neq 11k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) và $n \neq 17m - 5$ ($m \in \mathbb{N}^*$) thì phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ tối giản.

c) Từ câu b) ta có:

Để phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ rút gọn được thì $n = 11k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) và $n \neq 17m - 5$ ($m \in \mathbb{N}^*$)

Vì $150 < n < 170$ nên:

$$\text{TH1: } 150 < 11k + 2 < 170 \Rightarrow 148 < 11k < 168 \Rightarrow k \in \{14; 15\}$$

Với $k = 14$ thì $n = 156$

Với $k = 15$ thì $n = 167$

$$\text{TH2: } 150 < 17m - 5 < 170 \Rightarrow 155 < 17m < 175 \Rightarrow m = 10$$

Với $m = 10$ thì $n = 165$

Vậy $n \in \{156; 165; 167\}$ thì phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ rút gọn được.

Bài 9: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ có thể rút gọn được.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Gọi d là ước nguyên tố của $18n+3$ và $21n+7$ thì:

$$\begin{cases} 18n+3 : d \\ 21n+7 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(18n+3) : d \\ 6(21n+7) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 126n+21 : d \\ 126n+42 : d \end{cases} \Rightarrow [(126n+42) - (126n+21)] : d \Rightarrow 21 : d$$

$\Rightarrow d \in \{3; 7\}$ với $n \in \mathbb{N}$ và d là số nguyên tố.

Với $d = 3$ mà $18n+3 : 3 \forall n \in \mathbb{N}$ nên để phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ có thể rút gọn được thì $21n+7 : 3$

Mà $21n+7 \not\vdots 3 \forall n \in \mathbb{N}$ (vì $21n : 3$ và $7 \not\vdots 3$) $\Rightarrow d \neq 3$

Với $d = 7$ thì $21n+7 : 7 \forall n$ nên để phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ rút gọn được thì

$$18n+3 : 7 \Rightarrow 21n - (3n-3) : 7 \Rightarrow 3(n-1) : 7 \Rightarrow n-1 : 7 \Rightarrow n-1 = 7k \Rightarrow n = 7k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy với $n = 7k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ rút gọn được.

Bài 10: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên thì

$$(4n+5) : (2n-1) \text{ hay } (4n-2+7) : (2n-1) \Rightarrow [2(2n-1)+7] : (2n-1)$$

$$\text{Mà } 2(2n-1) : (2n-1) \Rightarrow 7 : (2n-1) \Rightarrow (2n-1) \in U(7)$$

$$U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}.$$

Ta có bảng sau:

$2n-1$	-1	1	-7	7
n	0	1	-3	4
A	-5	9	1	7

Vậy $n \in \{0; 1; -3; 4\}$ thì $\frac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên.

Bài 11: Cho biểu thức : $A = \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3}$. Tìm giá trị của n để:

- A là một phân số.
- A là một số nguyên.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3} = \frac{2n+1+3n-5-(4n-5)}{n-3} = \frac{n+1}{n-3}$$

$$\text{a) Để } \frac{n+1}{n-3} \text{ là phân số thì } \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n-3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 3 \end{cases}$$

b) Để $\frac{n+1}{n-3}$ là số nguyên thì

$$(n+1):(n-3) \text{ hay } (n-3+4):(n-3) \text{ hay } [(n-3)+4]:(n-3)$$

$$\text{Mà } (n-3):(n-3) \Rightarrow 4:(n-3) \Rightarrow (n-3) \in U(4)$$

$$U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}.$$

Ta có bảng sau:

$n-3$	1	-1	2	-2	4	-4
n	4	2	5	1	7	-1
A	5	-3	3	-1	2	0

Vậy $n \in \{-1; 1; 2; 4; 5; 7\}$ thì $\frac{n+1}{n-3}$ là số nguyên.

Bài 12: Với giá trị nào của số tự nhiên a thì :

a) $\frac{8a+19}{4a+1}$ có giá trị nguyên

b) $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Điều kiện: $a \in \mathbb{N}$

a) Để $\frac{8a+19}{4a+1}$ là số nguyên thì

$$(8a+19):(4a+1) \text{ hay } (8a+2+17):(4a+1) \text{ hay } [2(4a+1)+17]:(4a+1)$$

$$\text{Mà } 2(4a+1):(4a+1) \Rightarrow 17:(4a+1) \Rightarrow (4a+1) \in U(17)$$

$$U(17) = \{\pm 1; \pm 17\}.$$

Ta có bảng sau:

$4a+1$	1	-1	17	-17
a	0	$-\frac{1}{2}$ (loại vì $a \in \mathbb{N}$)	4	$-\frac{9}{2}$ (loại vì $a \in \mathbb{N}$)
A	19		3	

Vậy $a \in \{0; 4\}$ thì $\frac{8a+19}{4a+1}$ là số nguyên.

a) Ta có: $\frac{5a-17}{4a-23} = \frac{\frac{5}{4} \cdot 4a - 17}{4a-23} = \frac{\frac{5}{4} \cdot (4a-23) + \frac{47}{4}}{4a-23} = \frac{5}{4} + \frac{47}{4(4a-23)}$

Để $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất thì $4a-23$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $a \in \mathbb{N}$ nên $4a-23=1 \Rightarrow 4a=24 \Rightarrow a=6$.

Vậy $a=6$ thì $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Bài 13: Tìm x, y, z biết $\frac{x}{3} = \frac{6}{y} = \frac{z}{10}$ và $x+z=7+y$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{x}{3} = \frac{z}{10} \Rightarrow x = \frac{3}{10}z$

$$\frac{y}{6} = \frac{z}{10} \Rightarrow y = \frac{6}{10}z = \frac{3}{5}z$$

Theo đề:

$$x + z = 7 + y$$

$$\frac{3}{10}z + z = 7 + \frac{3}{5}z$$

$$\frac{3}{10}z + z - \frac{3}{5}z = 7$$

$$\frac{7}{10}z = 7$$

$$z = 10$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{3}{10} \cdot 10 = 3; y = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6$$

Vậy $x = 3; y = 6; z = 10$.

Bài 14: Tìm các số nguyên x, y sao cho $\frac{3}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$.

Lời giải: Ta có:

$$\frac{3}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{6} - \frac{y}{3}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{6} - \frac{2y}{6}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{5-2y}{6}$$

$$\text{Do đó: } x(5-2y) = 18 = 2 \cdot 3^2.$$

Do x, y là các số nguyên nên $5-2y$ là ước của 18, mặt khác $5-2y$ là số lẻ. Ước lẻ của 18 là: 1; -1; 3; -3; 9; -9. Ta có:

$5-2y$	1	-1	3	-3	9	-9
$2y$	4	6	2	8	-4	14
y	2	3	1	4	-2	7
x	18	-18	6	-6	2	-2

Vậy có sáu cặp số x, y ở bảng trên thỏa mãn bài toán.

Bài 15: Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{2+3}$.

Lời giải:

Ta luôn có:

$$\frac{a}{2} \geq \frac{a}{5} \text{ (xảy ra dấu bằng với } a=0)$$

$$\frac{b}{3} \geq \frac{b}{5} \text{ (xảy ra dấu bằng với } b=0)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{2} + \frac{b}{3} \geq \frac{a}{5} + \frac{b}{5} = \frac{a+b}{5}.$$

Xảy ra $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{5}$ chỉ trong trường hợp $a=b=0$.

Dạng 2: Tìm phân số biết mối liên hệ giữa tử và mẫu

Một số điều kiện cho trước thường gặp:

- ① Biết tử số (hoặc mẫu số), phân số cần tìm lớn hơn phân số này và nhỏ hơn phân số kia.
- ② Viết phân số dưới dạng tổng các phân số đã biết cùng số tử (hoặc cùng số mẫu).
- ③ Liên hệ về phép chia giữa phân số cần tìm với phân số đã cho.
- ④ Biết phân số bằng phân số nào đó và biết quan hệ ƯCLN(Tử, Mẫu) hoặc tổng (hiệu) của tử và mẫu.
- ⑤ Cộng một số vào tử hoặc mẫu được một phân số mới....

Phương pháp giải:

- Nếu bài toán cho tử số (mẫu số), biến đổi sao cho ba phân số đồng tử (đồng mẫu) rồi so sánh các phân số ta tìm được mẫu số (tử số) còn thiếu.
- Ở dạng toán viết phân số dưới dạng tổng các phân số đã biết cùng số tử (hoặc cùng số mẫu) ta phải tìm được bộ số thuộc các ước của mẫu sao cho tổng của chúng bằng tử. Khi đó ta tìm được bộ phân số có tổng bằng phân số ban đầu, các phân số này có tử số là ước của mẫu nên khi viết dưới dạng tối giản đều có tử số bằng 1.

- Từ các dữ kiện bài toán ta vận dụng linh hoạt các tính chất của phân số tối giản với tính chia hết để giải toán.
- Dạng toán: Tìm phân số bằng phân số $\frac{a}{b}$ ($a, b > 0$), biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là c , ta tìm phân số tối giản của $\frac{a}{b}$ sau đó nhân cả tử và mẫu phân số tối giản với c ta được số cần tìm.

Bài 1: Tìm phân số có tử là 5, biết rằng phân số đó lớn hơn $-\frac{11}{12}$ và nhỏ hơn $-\frac{11}{15}$.

Phân tích:

Do phân số có tử số bằng 5 nên ta có thể gọi dạng phân số cần tìm là $\frac{5}{x}$, sau đó ta biến đổi cả ba phân số trên có cùng tử số. Khi so sánh hai phân số cùng tử, phân số nào có mẫu số lớn hơn thì nhỏ hơn. Khi đó ta tìm được khoảng giá trị của x và chọn được giá trị x phù hợp.

Lời giải:

Gọi mẫu phân số cần tìm là x ($x \in \mathbb{N}^*$).

$$\text{Ta có: } \frac{-11}{12} < \frac{5}{x} < \frac{-11}{15} \Rightarrow \frac{55}{-60} < \frac{55}{11x} < \frac{55}{-75} \Rightarrow -75 < 11x < -60 \Rightarrow x = -6.$$

Vậy phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$.

Bình luận: Bài toán thuộc dạng biết tử số (hoặc mẫu số), phân số cần tìm lớn hơn phân số này và nhỏ hơn phân số kia.

Bài 2: Tìm phân số có mẫu là 12, biết rằng phân số đó lớn hơn $\frac{7}{13}$ và nhỏ hơn $\frac{11}{5}$.

Lời giải:

Gọi tử phân số cần tìm là x

Ta có: $\frac{7}{13} < \frac{x}{12} < \frac{11}{5} \Rightarrow \frac{420}{780} < \frac{65x}{780} < \frac{1716}{780} \Rightarrow 420 < 65x < 1716 \Rightarrow x \in \{7; 8; 9; \dots; 25; 26\}$.

Vậy các phân số cần tìm là: $\frac{7}{12}; \frac{8}{12}; \frac{9}{12}; \dots; \frac{25}{12}; \frac{26}{12}$.

Bài 3: Hãy viết phân số $\frac{11}{15}$ dưới dạng tổng của 3 phân số có tử số đều bằng 1 và có mẫu số khác nhau.

Phân tích: Nhận thấy nếu mẫu số bằng 15, $U(15) = \{1; 3; 5; 15\}$ ta không tìm được bộ ba số nào có tổng bằng 11. Lặp lại cách thử này đối với mẫu và tử của phân số khi nhân cả tử và mẫu của phân số với cùng một số cho đến khi tìm được bộ số thỏa mãn. Để thấy khi nhân cả tử và mẫu phân số với 4 ta được phân số $\frac{44}{60}$, $U(60) = \{1; 2; 3; 4; 5; 10; 15; 20; 30; 60\}$ khi đó ta tìm được bộ ba số cộng với nhau bằng 44 là $\{4; 10; 30\}$.

Lời giải:

$$\frac{11}{15} = \frac{44}{60} \Rightarrow U(60) = \{1; 2; 3; 4; 5; 10; 15; 20; 30; 60\}$$

$$30 + 10 + 4 = 44 \Rightarrow \frac{44}{60} = \frac{10}{60} + \frac{30}{60} + \frac{4}{60} \Rightarrow \frac{11}{15} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{15}.$$

Bài 4: Hãy viết phân số $\frac{5}{3}$ dưới dạng tổng của 3 phân số có tử số đều bằng 1 và có mẫu số khác nhau.

Lời giải:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} \Rightarrow U(6) = \{1; 2; 3; 6\}$$

$$6 + 3 + 1 = 10 \Rightarrow \frac{10}{6} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

Bài 5: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ nhỏ nhất (với $\frac{a}{b} > 0$) biết khi chia $\frac{a}{b}$ cho $\frac{7}{15}$ và $\frac{12}{25}$ được thương là các số nguyên.

Phân tích:

Do tính chất chia hết ta có: $\frac{a}{b}$ chia hết cho $\frac{7}{15}$ nên $\frac{15a}{7b}$ là số nguyên, vậy a chia hết cho 7, 15 chia hết cho b . Tương tự, $\frac{a}{b}$ chia hết cho $\frac{12}{25}$ nên $\frac{25a}{12b}$ là số nguyên, vậy a chia hết cho 12, 25 chia hết cho b .
Do tính chất của phân số tối giản và lớn hơn 0 nên ta có $a = \text{BCNN}(7,12)$ và $b = \text{ƯCLN}(15,25)$.

Lời giải:

Vì $\frac{a}{b}$ tối giản nên $a = \text{ƯCLN}(a,b) = 1$. và $\frac{a.15}{b.7}; \frac{a.25}{b.12}$ là các số nguyên nên a chia hết cho 7 và 12 còn 15 và 25 chia hết cho b .

Do đó $a \in \text{BC}(7,12)$ và $b \in \text{ƯC}(15,25)$.

Vì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nhỏ nhất lớn hơn 0 nên $a = \text{BCNN}(7,12)$ và $b = \text{ƯCLN}(15,25)$ nên $a = 84; b = 5$ Do đó phân số cần tìm là $\frac{84}{5}$.

Bài 6: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ nhỏ nhất (với $\frac{a}{b} > 0$) biết khi chia $\frac{a}{b}$ cho $\frac{9}{10}$ và $\frac{11}{15}$ được thương là các số nguyên.

Lời giải:

Vì $\frac{a}{b}$ tối giản nên $a = \text{ƯCLN}(a,b) = 1$. và $\frac{a.10}{b.9}; \frac{a.15}{b.11}$ là các số nguyên nên a chia hết cho 9 và 11 còn 10 và 15 chia hết cho b .

Do đó $a \in \text{BC}(9,11)$ và $b \in \text{ƯC}(10,15)$.

Vì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nhỏ nhất lớn hơn 0 nên $a = \text{BCNN}(9,11)$ và $b = \text{ƯCLN}(10,15)$ nên $a = 99; b = 5$ Do đó phân số cần tìm là $\frac{99}{5}$.

Bài 7: Tìm phân số bằng phân số $\frac{20}{39}$, biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 36.

Lời giải:

Ta thấy $\text{ƯCLN}(20, 39) = 1$. Suy ra phân số $\frac{20}{39}$ là phân số tối giản.

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 36.

Nên phân số cần tìm đã được rút gọn thành $\frac{20}{39}$ bằng cách chia cả tử và mẫu cho 36. Vậy phân số cần tìm

$$\text{là } \frac{20 \cdot 36}{39 \cdot 36} = \frac{720}{1404}.$$

Bài 8: Tìm phân số bằng phân số $\frac{15}{20}$, biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 14.

Lời giải:

Ta thấy $\text{ƯCLN}(15, 20) = 5$. Suy ra $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ và $\frac{3}{4}$ là phân số tối giản.

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 14.

Nên phân số cần tìm đã được rút gọn thành $\frac{3}{4}$ bằng cách chia cả tử và mẫu cho 14. Vậy phân số cần tìm

$$\text{là } \frac{3 \cdot 14}{4 \cdot 14} = \frac{42}{56}.$$

Bài 9: Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số của phân số ấy thì được một phân số mới, lớn gấp 2 lần phân số ban đầu ?

Lời giải:

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$. Nếu chỉ cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số ta được

$$\text{phân số } \frac{a+b}{b+b} = \frac{a+b}{2b}.$$

Đề $\frac{a+b}{2b}$ gấp 2 lần phân số lúc đầu thì $a+b$ phải bằng 4 lần a

$\Rightarrow$ Mẫu số b phải gấp 3 lần tử số a .

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là $\frac{1}{3}$.

Bình luận: Từ giả thiết bài toán ta tìm được mối liên hệ giữa tử và mẫu. Từ đó tìm được phân ban đầu.

Bài 10: Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng tử số vào tử số và cộng tử số vào mẫu số của phân số ấy thì được một phân số mới, giảm 6 lần phân số ban đầu ?

Lời giải:

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$. Nếu chỉ cộng tử số vào tử số và cộng tử số vào mẫu số ta được phân số

$$\frac{a+a}{b+a} = \frac{2a}{a+b}.$$

Đề $\frac{2a}{a+b}$ giảm 6 lần phân số ban đầu thì $a+b$ phải bằng 12 lần b

$\Rightarrow$ Tử số a phải gấp 11 lần mẫu số b .

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là $\frac{11}{1}$.

Bài 11: Tìm các số tự nhiên a và b biết rằng: $\frac{a}{b} = \frac{15}{35}$; $\text{ƯCLN}(a,b) \cdot \text{BCNN}(a,b) = 3549$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \Rightarrow a = 3k; b = 7k \quad (k \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$$

$$\text{ƯCLN}(a,b) \cdot \text{BCNN}(a,b) = 3549 \Rightarrow a \cdot b = 3549 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $21k^2 = 3549 \Rightarrow k^2 = 169 \Rightarrow k = 13$ (Vì $k \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow a = 3.13 = 39; b = 7.13 = 91$$

Bài 12: Tìm các số tự nhiên a và b biết rằng:

a) $\frac{a}{b} = \frac{132}{143}$; $\text{BCNN}(a, b) = 1092$.

b) $\frac{a}{b} = \frac{21}{35}$; $\text{ƯCLN}(a, b) = 30$.

Lời giải:

a) Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{132}{143} = \frac{12}{13} \text{ nên } a = 12k; b = 13k \left(k \in \mathbb{N}^* \right) \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \text{ƯCLN}(12, 13) = 1 \Rightarrow \text{ƯCLN}(12k, 13k) = k \text{ và } \text{BCNN}(12k, 13k) = 12.13.k \quad (2)$$

$$\text{Theo đề bài thì: } \text{BCNN}(a, b) = 1092 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3)

$$\Rightarrow 12.13.k = 1092$$

$$\Leftrightarrow 156k = 1092$$

$$\Leftrightarrow k = 1092 : 156 = 7$$

$$\text{Khi đó } a = 12.7 = 84; b = 13.7 = 91.$$

$$\text{Vậy } a = 84; b = 91.$$

b) Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} \text{ nên } a = 3k; b = 5k \left(k \in \mathbb{N}^* \right) \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \text{ƯCLN}(3, 5) = 1 \Rightarrow \text{ƯCLN}(3k, 5k) = k \quad (2)$$

$$\text{Theo đề bài thì: } \text{ƯCLN}(a, b) = 30 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) } \Rightarrow k = 30.$$

$$\text{Khi đó } a = 3.30 = 90; b = 5.30 = 150.$$

$$\text{Vậy } a = 90; b = 150.$$

Bài 13: Cho ba phân số $\frac{15}{42}$; $\frac{49}{56}$; $\frac{36}{51}$. Biến đổi ba phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu

của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ hai, mẫu của phân số thứ hai bằng tử của phân số thứ ba.

Lời giải:

Vì mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ hai nên ta có: $\frac{49}{56} = \frac{7}{8} = \frac{42}{48}$

Vì mẫu của phân số thứ hai bằng tử của phân số thứ ba nên ta có: $\frac{36}{51} = \frac{12}{17} = \frac{48}{68}$

Vậy ba phân số cần tìm là: $\frac{15}{42}; \frac{42}{48}; \frac{48}{68}$.

Bài 14: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là 68. Cộng thêm vào tử số của phân số đó 4 đơn vị thì ta được phân số mới bằng phân số $\frac{3}{2}$. Tìm phân số ban đầu.

Lời giải:

Tổng của tử số và mẫu số là: $68 \cdot 2 = 136$

Nếu cộng thêm vào tử số 4 đơn vị thì ta được tổng mới là: $136 + 4 = 140$

Ta có sơ đồ:

Tử số: |---|---|---|

Mẫu số: |---|---|

Tử số mới là: $140 : (3 + 2) \cdot 3 = 84$

Tử số ban đầu là: $84 - 4 = 80$

Mẫu số ban đầu là: $136 - 80 = 56$

Vậy phân số ban đầu là: $\frac{80}{56}$.

Bài 15: Cho hai số a và b thỏa mãn: $a - b = 2(a + b) = \frac{a}{b}$. Chứng minh $a = -3b$. Tính $\frac{a}{b}$. Tìm a, b .

Lời giải:

$$a - b = 2(a + b)$$

$$a - b = 2a + 2b$$

Ta có: $a - 2a = 2b + b$

$$-a = 3b$$

$$a = -3b$$

Thay $a = -3b$ vào $a - b = \frac{a}{b}$ ta được:

$$-3b - b = \frac{a}{b}$$

$$-4b = -3$$

$$b = \frac{3}{4}$$

$$\text{Suy ra } a = -3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{-9}{4}$$

$$\text{Vậy } a = -3b, \frac{a}{b} = -3; a = \frac{-9}{4}; b = \frac{3}{4}.$$

Bài 16: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29}$ và $8b - 9a = 31$.

Lời giải:

$$\text{Theo đề bài ta có: } 8b - 9a = 31 \Rightarrow b = \frac{31 + 9a}{8} = \frac{32 - 1 + 8a + a}{8} = \frac{(32 + 8a) + a - 1}{8} = 4 + a + \frac{a - 1}{8}$$

$$\text{Vì } a, b \in \mathbb{N} \text{ nên } 4 + a + \frac{a - 1}{8} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{a - 1}{8} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a - 1) : 8 \Leftrightarrow a = 8k + 1 (k \in \mathbb{N})$$

Khi đó:

$$b = \frac{31 + 9(8k + 1)}{8} = \frac{40 + 72k}{8} = 9k + 5$$

$$\text{Lại có: } \frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29} \Leftrightarrow \frac{11}{17} < \frac{8k + 1}{9k + 5} < \frac{23}{29}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11(9k + 5) < 17(8k + 1) \\ 29(8k + 1) < 23(9k + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{38}{37} \\ k < \frac{86}{25} \end{cases}$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{N} \text{ nên } k \in \{2; 3\}$$

$$\text{Với } k = 2 \text{ thì } \begin{cases} a = 8k + 1 = 8 \cdot 2 + 1 = 17 \\ b = 9k + 5 = 9 \cdot 2 + 5 = 23 \end{cases}$$

$$\text{Với } k = 3 \text{ thì } \begin{cases} a = 8k + 1 = 8 \cdot 3 + 1 = 25 \\ b = 9k + 5 = 9 \cdot 3 + 5 = 32 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = 17; b = 23 \text{ hoặc } a = 25; b = 32.$$

∞ HẾT ∞

CHUYÊN ĐỀ PHÂN SỐ**CHỦ ĐỀ 2: PHÂN SỐ TỐI GIẢN****PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

- Phân số tối giản hay còn gọi là phân số không thể rút gọn được nữa là phân số mà tử và mẫu chỉ có ước chung là 1 và -1.

- Giả sử ta có phân số $\frac{a}{b}$. Phân số $\frac{a}{b}$ được gọi là phân số tối giản khi và chỉ khi $UCLN(a, b) = 1$.

- Nếu phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì phân số $\frac{b}{a}$ cũng là phân số tối giản.

- Tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

- Tính chất:

$$+ \begin{cases} a:m \\ b:m \end{cases} \Rightarrow a \pm b:m$$

$$+ a:m \Rightarrow a.k:m$$

- Thuật toán Ôclit tìm $UCLN(a; b)$:

Ta tìm $UCLN(a; b)$ bằng cách dùng thuật toán Euclide như sau :

$$a = bq_0 + r_1 \quad \text{với } 0 < r_1 < |b|$$

$$b = r_1 q_1 + r_2 \quad \text{với } 0 < r_2 < r_1$$

....

$$r_{n-1} = r_n q_n .$$

Thuật toán phải kết thúc với một số dư bằng 0

Do đó ta có: $(a; b) = (b; r_1) = (r_1; r_2) = \dots = (r_{n-1}; r_n) = r_n$.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Chứng minh phân số với tham số n là phân số tối giản.

I. Phương pháp giải

Chứng minh phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, ta cần chứng minh $ƯCLN(a, b) = \pm 1$, hoặc dùng thuật toán Euclide hoặc tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0 thì các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{1}{n}$ b. $\frac{n+1}{n}$ c. $\frac{n-1}{n}$

Lời giải

a. $\frac{1}{n}$

Vì $ƯCLN(1, n) = 1$ nên $\frac{1}{n}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{n+1}{n}$

*Cách 1: Theo thuật toán Euclide: $ƯCLN(n+1, n) = ƯCLN(n; 1) = 1$

do đó $\frac{n+1}{n}$ là phân số tối giản.

*Cách 2: Giả sử $ƯCLN(n+1, n) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n+1) : d \\ n : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow n+1 - n : d$$

$$\Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Vậy $\frac{n+1}{n}$ là phân số tối giản.

*Cách 3: Ta có: $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ mà $\frac{1}{n}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{n+1}{n}$ là phân số tối giản.

Bài 2: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{Z}$ các phân số sau tối giản.

a. $\frac{n}{2n+1}$

b. $\frac{1}{7n+1}$

c. $\frac{n+5}{n+6}$

d. $\frac{n+1}{2n+3}$

e. $\frac{3n+2}{5n+3}$

f. $\frac{7n+1}{14n+3}$

g. $\frac{2n+7}{3n+10}$

h. $\frac{2n+3}{4n+4}$

Lời giải

a. $\frac{n}{2n+1}$

Giả sử $ƯCLN(n, 2n+1) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} n : d \\ 2n+1 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n : d \\ 2n+1 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2n+1) - 2n : d$$

$$\Rightarrow 2n+1 - 2n : d$$

$$\Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{n}{2n+1}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{1}{7n+1}$

Vì $ƯCLN(1, 7n+1) = 1$ nên $\frac{1}{7n+1}$ là phân số tối giản.

c. $\frac{n+5}{n+6}$

Giả sử $ƯCLN(n+5, n+6) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} n+5 : d \\ n+6 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (n+6) - (n+5) : d$$

$$\Rightarrow n+6-n-5 \div d$$

$$\Rightarrow 1 \div d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{n+5}{n+6}$ là phân số tối giản.

d. $\frac{n+1}{2n+3}$

Giả sử $ƯCLN(n+1, 2n+3) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 \div d \\ 2n+3 \div d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+2 \div d \\ 2n+3 \div d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2n+3) - (2n+2) \div d$$

$$\Rightarrow 2n+3-2n-2 \div d$$

$$\Rightarrow 1 \div d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{n+1}{2n+3}$ là phân số tối giản.

e. $\frac{3n+2}{5n+3}$

Giả sử $ƯCLN(3n+2, 5n+3) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2 \div d \\ 5n+3 \div d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3n+2) \div d \\ 3(5n+3) \div d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15n+10 \div d \\ 15n+9 \div d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (15n+10) - (15n+9) \div d$$

$$\Rightarrow 15n+10-15n-9 \div d$$

$$\Rightarrow 1 \div d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{3n+2}{5n+3}$ là phân số tối giản.

f. $\frac{7n+1}{14n+3}$

Giả sử $ƯCLN(7n+1, 14n+3) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 7n+1 \vdots d \\ 14n+3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(7n+1) \vdots d \\ 14n+3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14n+2 \vdots d \\ 14n+3 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (14n+3) - (14n+2) \vdots d$$

$$\Rightarrow 14n+3 - 14n-2 \vdots d$$

$$\Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{7n+1}{14n+3}$ là phân số tối giản.

g. $\frac{2n+7}{3n+10}$

Giả sử $ƯCLN(2n+7, 3n+10) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+7 \vdots d \\ 3n+10 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+7) \vdots d \\ 2(3n+10) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+21 \vdots d \\ 6n+20 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n+21) - (6n+20) \vdots d$$

$$\Rightarrow 6n+21 - 6n-20 \vdots d$$

$$\Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{2n+7}{3n+10}$ là phân số tối giản.

h. $\frac{2n+3}{4n+4}$

Giả sử $ƯCLN(2n+3, 4n+4) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+3 \vdots d \\ 4n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3) \vdots d \\ 4n+4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6 \vdots d \\ 4n+4 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n+6) - (4n+4) : d$$

$$\Rightarrow 4n+6-4n-4 : d$$

$$\Rightarrow 2 : d$$

Vì $2n+3$ là số lẻ, $4n+4$ là số chẵn nên suy ra $d=1$

Vậy phân số $\frac{2n+3}{4n+4}$ là phân số tối giản.

Bài 3: Chứng minh rằng các phân số sau tối giản:

a. $\frac{n^2+1}{n}$

b. $\frac{n}{n^2+1}$

c. $\frac{7n+1}{7n^2+n+1}$

d. $\frac{n}{n^3+1}$

e. $\frac{2n^2+n+1}{n}$

Lời giải

a. $\frac{n^2+1}{n}$

Ta có: Theo thuật toán Euclide: $ƯCLN(n^2+1, n) = ƯCLN(n, 1) = 1$.

Do đó: phân số $\frac{n^2+1}{n}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{n}{n^2+1}$

Vì phân số $\frac{n^2+1}{n}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{n}{n^2+1}$ là phân số tối giản.

c. $\frac{7n+1}{7n^2+n+1}$

Ta có: Theo thuật toán Euclide: $ƯCLN(7n^2+n+1, 7n+1) = ƯCLN(7n+1, 1) = 1$.

Do đó: phân số $\frac{7n^2+n+1}{7n+1}$ là phân số tối giản.

Vì phân số $\frac{7n^2+n+1}{7n+1}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{7n+1}{7n^2+n+1}$ là phân số tối giản.

d. $\frac{n}{n^3+1}$

Ta có: Theo thuật toán Euclide: $UCLN(n^3+1, n) = UCLN(n; 1) = 1$.

Do đó: phân số $\frac{n^3+1}{n}$ là phân số tối giản.

Vì phân số $\frac{n^3+1}{n}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{n}{n^3+1}$ là phân số tối giản.

e. $\frac{2n^2+n+1}{n}$

Ta có: Theo thuật toán Euclide: $UCLN(2n^2+n+1, n) = UCLN(n; 1) = 1$.

Do đó: phân số $\frac{2n^2+n+1}{n}$ là phân số tối giản.

Bài 4: Cho a là số tự nhiên chia 4 dư 3. Phân số $\frac{a}{a+2}$ có là phân số tối giản không?

Lời giải

Giả sử $UCLN(a, a+2) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a \div d \\ a+2 \div d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+2) - a \div d$$

$$\Rightarrow a+2-a \div d$$

$$\Rightarrow 2 \div d$$

Vì a là số tự nhiên chia 4 dư 3 nên a là số lẻ.

Suy ra: $d = 1$

Vậy phân số $\frac{a}{a+2}$ là phân số tối giản.

Bài 5: Chứng minh rằng nếu a là số nguyên khác -1 thì giá trị của biểu thức $A = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a^3 + 2a^2 + 2a + 1}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a^3 + 2a^2 + 2a + 1} = \frac{(a+1)(a^2 + a - 1)}{(a+1)(a^2 + a + 1)} = \frac{a^2 + a - 1}{a^2 + a + 1}$$

$$\text{Gọi } d = \text{ƯCLN}(a^2 + a - 1, a^2 + a + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + a - 1 : d \\ a^2 + a + 1 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [a^2 + a + 1 - (a^2 + a - 1)] : d$$

$$\Rightarrow 2 : d$$

$$\text{Mà } a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1 \text{ là số lẻ nên } d \text{ lẻ} \Rightarrow d = 1$$

Vậy với a khác -1 thì giá trị của A là phân số tối giản.

Bài 6: Chứng minh với mọi số nguyên n khác không thì phân số $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$\text{Giả sử } d = \text{ƯCLN}[2n+1, 2n(n+1)]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1 : d \\ 2n(n+1) : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1 : d \\ n(2n+2) : d \end{cases}$$

$$\text{Mà } \text{ƯCLN}(2n+1, 2n+2) = 1 \text{ nên}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1 : d \\ n : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 : d \\ 2n : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2n+1-2n:d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ là phân số tối giản.

Dạng 2: Tìm tham số n để phân số tối giản.

I. Phương pháp giải

- Bước 1: Giả sử d là ước chung của tử và mẫu $\Rightarrow$ Tử và mẫu cùng chia hết cho d .
 - Bước 2: Vận dụng các tính chất quan hệ chia hết để tìm các giá trị của d .
 - Bước 3: Xác định giá trị khác -1 và 1 của $d \Rightarrow$ tử hoặc mẫu không chia hết cho các giá trị đó $\Rightarrow$ từ đó tìm các điều kiện của n .
- Hoặc biến đổi phân số thành tổng hoặc hiệu của số nguyên với phân số tối giản.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{2n+3}{4n+1}$

b. $\frac{3n+2}{7n+1}$

c. $\frac{2n+7}{5n+2}$

Lời giải

a. $\frac{2n+3}{4n+1}$

Giả sử $d \in UC(2n+3, 4n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+3:d \\ 4n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3):d \\ 4n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6:d \\ 4n+1:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n+6)-(4n+1):d$$

$$\Rightarrow 4n+6-4n-1:d$$

$$\Rightarrow 5:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 5\}$$

Để phân số $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 5$

Hay $2n+3$ không chia hết cho 5.

Ta có: $2n+3 \neq 5k \Leftrightarrow 2n+3-5 \neq 5k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(n-1) \neq 5k$$

$$\Leftrightarrow n-1 \neq 5k \Leftrightarrow n \neq 5k+1$$

Vậy: với $n \neq 5k+1$ thì phân số $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{3n+2}{7n+1}$

Giả sử $d \in UC(3n+2, 7n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2 \vdots d \\ 7n+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(3n+2) \vdots d \\ 3(7n+1) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21n+14 \vdots d \\ 21n+3 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (21n+14) - (21n+3) \vdots d$$

$$\Rightarrow 21n+14-21n-3 \vdots d$$

$$\Rightarrow 11 \vdots d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Để phân số $\frac{3n+2}{7n+1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 11$

Hay $7n+1$ không chia hết cho 11.

Ta có: $7n+1 \neq 11k \Leftrightarrow 7n+1-22 \neq 11k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 7(n-3) \neq 11k$$

$$\Leftrightarrow n-3 \neq 11k \Leftrightarrow n \neq 11k+3$$

Vậy: với $n \neq 11k+3$ thì phân số $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản.

c. $\frac{2n+7}{5n+2}$

Giả sử $d \in UC(2n+7, 5n+2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+7 \vdots d \\ 5n+2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(2n+7) \vdots d \\ 2(5n+2) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10n+35 \vdots d \\ 10n+4 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (10n+35) - (10n+4) \vdots d$$

$$\Rightarrow 10n + 35 - 10n - 4 : d$$

$$\Rightarrow 31 : d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 31\}$$

Để phân số $\frac{2n+7}{5n+2}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 31$

Hay $2n+7$ không chia hết cho 31.

Ta có: $2n+7 \neq 31k \Leftrightarrow 2n+7-31 \neq 31k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(n-12) \neq 31k$$

$$\Leftrightarrow n-12 \neq 31k \Leftrightarrow n \neq 31k+12$$

Vậy: với $n \neq 31k+12$ thì phân số $\frac{2n+7}{5n+2}$ là phân số tối giản.

Bài 2 : Tìm tất cả các số nguyên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{3n+4}{n-1}$

b. $\frac{2n-9}{n-1}$

c. $\frac{n^2-n-7}{n-1}$

Lời giải

a. $\frac{3n+4}{n-1}$

Ta có: $\frac{3n+4}{n-1} = \frac{3n-3+7}{n-1} = 3 + \frac{7}{n-1}$ (với $n \neq 1$)

Để $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $ƯCLN(7, n-1) = 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $ƯCLN(7, n-1) \neq 1$ thì $n-1 : 7$ hay $n-1 = 7k \ (k \in \mathbb{Z})$ do đó $n = 7k+1 \ (k \in \mathbb{Z})$ nên $ƯCLN(7, n-1) = 1$ khi $n \neq 7k+1 \ (k \in \mathbb{Z})$

Vậy: phân số $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1 \ (k \in \mathbb{Z})$

b. $\frac{2n-9}{n-1}$

Ta có: $\frac{2n-9}{n-1} = \frac{2n-2-7}{n-1} = 2 - \frac{7}{n-1}$ (với $n \neq 1$)

Để $\frac{2n-9}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $ƯCLN(7, n-1) = 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $ƯCLN(7, n-1) \neq 1$ thì $n-1 : 7$ hay $n-1 = 7k$ ($k \in \mathbb{Z}$) do đó $n = 7k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$) nên $ƯCLN(7, n-1) = 1$ khi $n \neq 7k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vậy: phân số $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

c. $\frac{n^2-n-7}{n-1}$

Ta có: $\frac{n^2-n-7}{n-1} = n - \frac{7}{n-1}$ (với $n \neq 1$)

Để $\frac{n^2-n-7}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $ƯCLN(7, n-1) = 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $ƯCLN(7, n-1) \neq 1$ thì $n-1 : 7$ hay $n-1 = 7k$ ($k \in \mathbb{Z}$) do đó $n = 7k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$) nên $ƯCLN(7, n-1) = 1$ khi $n \neq 7k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vậy: phân số $\frac{n^2-n-7}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Bài 3: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{3}{2n+3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Vì 3 là số nguyên tố nên $\frac{3}{2n+3}$ là phân số tối giản khi $2n+3$ không chia hết cho 3.

Do $3 \nmid 3$ nên $2n \nmid 3$ khi $n \nmid 3$ hay $n \neq 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Bài 4: Tìm các số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{4n^2 + 6n + 3}{n + 3}$

b. $\frac{18n + 3}{21n + 7}$

c. $\frac{8n + 193}{4n + 3}$

Lời giải

a. $\frac{4n^2 + 6n + 3}{2n + 3}$

Giả sử $d \in \text{ƯC}(4n^2 + 6n + 3, 2n + 3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n^2 + 6n + 3 \vdots d \\ 2n + 3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n^2 + 6n + 3 \vdots d \\ 2n(2n + 3) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n^2 + 6n + 3 \vdots d \\ 4n^2 + 6n \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n^2 + 6n + 3) - (4n^2 + 6n) \vdots d$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 6n + 3 - 4n^2 - 6n \vdots d$$

$$\Rightarrow 3 \vdots d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 3\}$$

Để phân số $\frac{4n^2 + 6n + 3}{2n + 3}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 3$

Hay $2n + 3$ không chia hết cho 3.

Ta có: $2n + 3 \neq 3k \Leftrightarrow 2n + 3 - 9 \neq 3k \Leftrightarrow 2n - 6 \neq 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow 2(n - 3) \neq 3k$$

$$\Leftrightarrow n - 3 \neq 3k \Leftrightarrow n \neq 3k + 3$$

Vậy: với $n \neq 3(k + 1)$ thì phân số $\frac{4n^2 + 6n + 3}{2n + 3}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{18n + 3}{21n + 7}$

Giả sử d là ước chung nguyên tố của $(18n+3)$ và $(21n+7)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 18n+3 \vdots d \\ 21n+7 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(18n+3) \vdots d \\ 6(21n+7) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 126n+21 \vdots d \\ 126n+42 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (126n+42) - (126n+21) \vdots d$$

$$\Rightarrow 126n+42-126n-21 \vdots d$$

$$\Rightarrow 21 \vdots d \Rightarrow d \in \{3; 7\}$$

$$+d=3 \Rightarrow 21n+7 \vdots 3 \Rightarrow 7 \vdots 3 \text{ (vô lí)}$$

$$+d=3 \Rightarrow 18n+3 \vdots 7 \Rightarrow 18n+3n-3n+3 \vdots 7 \Rightarrow 21n-3n+3 \vdots 7 \Rightarrow 3-3n \vdots 7 \Rightarrow n-1 \vdots 7$$

$$\Rightarrow n-1=7k \Rightarrow n=7k+1$$

Vậy: với $n \neq 7k+1$ thì phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ là phân số tối giản.

c. $\frac{8n+193}{4n+3}$

Giả sử d là ước chung nguyên tố của $(8n+193)$ và $(4n+3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8n+193 \vdots d \\ 4n+3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n+193 \vdots d \\ 2(4n+3) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n+193 \vdots d \\ 8n+6 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (8n+193) - (8n+6) \vdots d$$

$$\Rightarrow 8n+193-8n-6 \vdots d$$

$$\Rightarrow 187 \vdots d \Rightarrow d \in \{11; 17\}$$

$$+d=11 \Rightarrow 4n+3 \vdots 11 \Rightarrow 4n+3-11 \vdots 11 \Rightarrow 4n-8 \vdots 11$$

$$\Rightarrow 4(n-2) \vdots 11 \Rightarrow n-2 \vdots 11 \Rightarrow n=11k+2 \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$+d=17 \Rightarrow 4n+3 \vdots 17 \Rightarrow 4n+3+17 \vdots 17 \Rightarrow 4n+20 \vdots 17 \Rightarrow 4(n+5) \vdots 17$$

$$\Rightarrow n+5 \vdots 17 \Rightarrow n=17l-5 \text{ (} l \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Vậy: với $n \neq 11k + 2$, $n \neq 17l - 5$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) thì phân số $\frac{8n+193}{4n+3}$ là phân số tối giản.

Bài 5: Tìm tất cả số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{3-2n}{4n+5}$

b. $\frac{16n+5}{6n+1}$

Lời giải

a. $\frac{3-2n}{4n+5}$

Giả sử $d \in \text{ƯC}(3-2n, 4n+5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3-2n \vdots d \\ 4n+5 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3-2n) \vdots d \\ 4n+5 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6-4n \vdots d \\ 4n+5 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6-4n) + (4n+5) \vdots d$$

$$\Rightarrow 6-4n+4n+5 \vdots d$$

$$\Rightarrow 11 \vdots d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Để phân số $\frac{3-2n}{4n+5}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 11$

Hay $3-2n$ không chia hết cho 11.

Ta có: $3-2n \neq 11k \Leftrightarrow 3-2n-11 \neq 11k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow -2(n+4) \neq 11k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n+4 \neq 11k \Leftrightarrow n \neq 11k-4 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: với $n \neq 11k-4$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì phân số $\frac{3-2n}{4n+5}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{16n+5}{6n+1}$

Giả sử $d \in \text{ƯC}(16n+5, 6n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16n+5:d \\ 6n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(16n+5):d \\ 8(6n+1):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 48n+15:d \\ 48n+8:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (48n+15)-(48n+8):d$$

$$\Rightarrow 48n+15-48n-8:d$$

$$\Rightarrow 7:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 7\}$$

Để phân số $\frac{16n+5}{6n+1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 7$

Hay $6n+1$ không chia hết cho 7.

Ta có: $6n+1 \neq 7k \Leftrightarrow 6n+1-7n \neq 7k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow -1(n-1) \neq 7k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n-1 \neq 7k \Leftrightarrow n \neq 7k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: với $n \neq 11k-4 \quad (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{3-2n}{4n+5}$ là phân số tối giản.

Bài 6: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ tối giản.

Lời giải

Giả sử $d \in \text{ƯC}(3n^2+2n+3, 2n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2+2n+3:d \\ 2n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3n^2+2n+3):d \\ 3n(2n+1):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n^2+4n+6:d \\ 6n^2+3n:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n^2+4n+6)-(6n^2+3n):d$$

$$\Rightarrow 6n^2+4n+6-6n^2-3n:d$$

$$\Rightarrow n+6:d \Rightarrow 2(n+6):d$$

$$\Rightarrow 2n+12:d$$

$$\Rightarrow 11:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Để phân số $\frac{3n^2 + 2n + 3}{2n + 1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 11$

Hay $2n + 1$ không chia hết cho 11.

Ta có: $2n + 1 \neq 11k \Leftrightarrow 2n + 1 + 11 \neq 11k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(n + 6) \neq 11k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n + 6 \neq 11k \Leftrightarrow n \neq 11k - 6 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: với $n \neq 11k - 6 \quad (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{3n^2 + 2n + 3}{2n + 1}$ là phân số tối giản.

Dạng 3: Tìm tham số n để phân số không tối giản.

I. Phương pháp giải

Để một phân số không tối giản thì tử số và mẫu số phải có ít nhất một ước chung là một số nguyên tố.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm tất cả các số nguyên n để $\frac{7}{n-1} (n \neq 1)$ là phân số chưa tối giản.

Lời giải

Để $\frac{7}{n-1} (n \neq 1)$ không là phân số tối giản ta phải có $UCLN(n-1; 7) \neq 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $UCLN(n-1; 7) \neq 1$ thì $n-1 : 7$

hay $n-1 = 7k \quad (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$, do đó $n = 7k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$

Bài 2: Tìm tất cả các số nguyên n để $A = \frac{63}{3n+1}$ không là phân số tối giản.

Lời giải

Ta có $63 = 3^2 \cdot 7$ nên A không phải là phân số tối giản khi $3n+1$ chia hết cho 3 hoặc 7.

Vì $3n+1$ không chia hết cho 3 nên $3n+1$ phải chia hết cho 7.

hay $3n+1-7=3(n-2):7 \Rightarrow n-2:7$ (vì $(3;7)=1$)

do đó $n=7k+2$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$)

Vậy $n=7k+2$ để $A=\frac{63}{3n+1}$ không là phân số tối giản.

Bài 3: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $B=\frac{6n+7}{3n+2}$ không là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi d là ước nguyên tố chung (nếu có) của $6n+7$ và $3n+2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6n+7:d \\ 3n+2:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+7:d \\ 6n+4:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n+7)-(6n+4):d \text{ hay } 3:d$$

Vì d là ước nguyên tố nên $d=3$

Khi đó $(3n+2):3 \Rightarrow 2:3$ vô lý

Vậy không có số tự nhiên n để phân số $B=\frac{6n+7}{3n+2}$ không là phân số tối giản.

Bài 4: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ không là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi d là ước nguyên tố chung (nếu có) của $3n^2+2n+3$ và $2n+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2+2n+3:d \\ 2n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3n^2+2n+3):d \\ 3n(2n+1):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [2(3n^2+2n+3)-3n(2n+1)]:d \text{ hay } 2n+12:d \Rightarrow 2n+1+11:d$$

Suy ra $11:d \Rightarrow d = 11$

Khi đó $(2n+1-11):11$ hay $2(n-5):11 \Rightarrow n-5:11$

$$\Rightarrow n = 11k + 5 (k \in \mathbb{N})$$

Vậy với $n = 11k + 5 (k \in \mathbb{N})$ để phân số $\frac{3n^2 + 2n + 3}{2n + 1}$ không là phân số tối giản.

Bài 5: Chứng minh rằng: $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}$ là phân số chưa tối giản.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}} = \frac{\overline{ab} \cdot 101}{\overline{cd} \cdot 101} = \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$$

Vậy $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}$ là phân số chưa tối giản.

Bài 6: Phân số $\frac{4n+7}{6n+5} (n \in \mathbb{N})$ rút gọn cho những số nguyên dương nào?

Lời giải

Gọi $d (d \in \mathbb{Z}^*)$ là ước chung (nếu có) của $4n+7$ và $6n+5$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n+7:d \\ 6n+5:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(4n+7):d \\ 2(6n+5):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [3(4n+7) - 2(6n+5)]:d$$

Suy ra $11:d \Rightarrow d = 11$

Vậy phân số $\frac{4n+7}{6n+5} (n \in \mathbb{N})$ hoặc tối giản hoặc chỉ rút gọn được cho 11.

Dạng 4: Chứng minh phân số tối giản với điều kiện cho trước

I. Phương pháp giải

- Dùng phương pháp phản chứng.
- Dùng định nghĩa phân số tối giản.

II. Bài toán

Bài 1: Cho phân số $\frac{p}{q}$ ($q \in \mathbb{N}^*$) tối giản. Chứng minh rằng phân số $\frac{p+q}{q}$ tối giản.

Lời giải

Chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử $\frac{p+q}{q}$ không tối giản tức là tử $p+q$ và mẫu q có một ước chung $d \neq 1$.

suy ra $p+q \vdots d; q \vdots d \Rightarrow p \vdots d$

như vậy p và q có một ước chung $d \neq 1$.

Điều này trái với đề bài đã có $\frac{p}{q}$ tối giản

Vậy $\frac{p+q}{q}$ là phân số tối giản.

Bài 2: Cho phân số $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$) là phân số chưa tối giản. Chứng minh rằng phân số $\frac{a+b}{b}$ cũng chưa tối giản.

Lời giải

Vì phân số $\frac{a}{b}$ là phân số chưa tối giản nên $UCLN(a, b) = d$ ($d \in \mathbb{Z}, d \neq 0, d \neq \pm 1$)

$\Rightarrow a \vdots d, b \vdots d \Rightarrow (a+b) \vdots d$

$\Rightarrow d \in UC(a+b, b)$ mà $d \neq 0, d \neq \pm 1$

Do đó phân số $\frac{a+b}{b}$ cũng chưa tối giản.

Bài 3: Cho phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$) xét xem phân số $\frac{11a+2b}{18a+5b}$ có là phân số tối giản không?

Lời giải

Gọi $UCLN(11a+2b; 18a+5b) = d$ thì

$$\begin{cases} 18a + 5b : d \\ 11a + 2b : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11(18a + 5b) : d \\ 18(11a + 2b) : d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11.18a + 55b : d \\ 11.18a + 36b : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (11.18a + 55b) - (11.18a + 36b) : d$$

$$\Rightarrow 55b - 36b = 19b : d \Rightarrow b : d \text{ hoặc } 19 : d.$$

+ Nếu $b : d$ ta có

$$\begin{cases} 18a + 5b : d \\ 11a + 2b : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.(18a + 5b) : d \\ 5.(11a + 2b) : d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 54a + 15b : d \\ 55a + 10b : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - 5b : d \text{ mà } b : d \text{ nên } \Rightarrow 5b : d \Rightarrow a : d$$

Mặt khác do $\frac{a}{b}$ tối giản nên $d = 1$ (1)

+ Nếu $19 : d$ thì $d = 19$ hoặc $d = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{11a+2b}{18a+5b}$ hoặc tối giản hoặc rút gọn được cho 19.

Bài 4: Tìm số tự nhiên m nhỏ nhất khác 1 để các phân số $\frac{15}{m}; \frac{28}{m}$ đều tối giản.

Lời giải

Xét phân số $\frac{15}{m}$, có $15 = 3.5$

Nên phân số $\frac{15}{m}$ tối giản khi $m \neq 3k; m \neq 5k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$)

Xét phân số $\frac{28}{m}$, có $28 = 2^2 \cdot 7$

Nên phân số $\frac{28}{m}$ tối giản khi $m \neq 2k; m \neq 7k (k \in \mathbb{Z}^+)$

Vậy các phân số $\frac{15}{m}; \frac{28}{m}$ cùng tối giản khi $m \neq 3k; m \neq 5k; m \neq 2k; m \neq 7k (k \in \mathbb{Z}^+)$

Mặt khác, m là số tự nhiên nhỏ nhất khác 1 nên ta chọn $m = 11$.

Vậy $m = 11$ thì các phân số $\frac{15}{m}; \frac{28}{m}$ đều tối giản.

Bài 5: Tìm các số nguyên $b (21 \leq b \leq 31)$ sao cho các phân số $\frac{7}{b}; \frac{10}{b}; \frac{11}{b}$ đều là phân số tối giản.

Lời giải

Ta có $10 = 2 \cdot 5$ nên để các phân số $\frac{7}{b}; \frac{10}{b}; \frac{11}{b}$ đều là phân số tối giản thì

$$b \neq 2k; b \neq 5k; b \neq 7k; b \neq 11k (k \in \mathbb{Z}^+)$$

Vì $b \in \mathbb{Z}, 21 \leq b \leq 31$ nên ta chọn $b \in \{23; 27; 29; 31\}$.

Vậy $b \in \{23; 27; 29; 31\}$ thì các phân số $\frac{7}{b}; \frac{10}{b}; \frac{11}{b}$ đều là phân số tối giản.

Bài 6: Tìm số tự nhiên m nhỏ nhất để các phân số $\frac{7}{m+9}; \frac{8}{m+10}; \dots; \frac{31}{m+33}$ đều tối giản.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{7}{m+9} = \frac{7}{7+(m+2)}$$

$$\frac{8}{m+10} = \frac{8}{8+(m+2)}$$

.....

$$\frac{31}{m+33} = \frac{31}{31+(m+2)}$$

Các phân số trên có dạng $\frac{a}{a+(m+2)}$

Để các phân số trên tối giản thì a và $m+2$ là hai số nguyên tố cùng nhau(vì nếu chúng không là hai số nguyên tố cùng nhau thì chúng cùng chia hết cho số $d \neq 1$ suy ra phân số rút gọn được cho d)

Ta cần tìm số tự nhiên m sao cho $m+2$ nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số $7; 8; \dots; 31$

Như vậy $m+2$ phải là số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn 31 đó là số 37

$$m+2=37 \Rightarrow m=35$$

Vậy với $m=35$ thì các phân số $\frac{7}{m+9}; \frac{8}{m+10}; \dots; \frac{31}{m+33}$ đều tối giản.

Bài 7: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số $\frac{5}{n+8}; \frac{6}{n+9}; \dots; \frac{17}{n+20}$ đều tối giản.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{5}{n+8} = \frac{5}{5+(n+3)}$$

$$\frac{6}{n+9} = \frac{6}{6+(n+3)}$$

.....

$$\frac{17}{n+20} = \frac{17}{17+(n+3)}$$

Các phân số trên có dạng $\frac{a}{a+(n+3)}$

Để các phân số trên tối giản thì a và $n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau(vì nếu chúng không là hai số nguyên tố cùng nhau thì chúng cùng chia hết cho số $d \neq 1$ suy ra phân số rút gọn được cho d)

Ta cần tìm số tự nhiên n sao cho $n+3$ nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số $5; 6; \dots; 17$

Như vậy $n+3$ phải là số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn 17 đó là số 19

$$n+3=19 \Rightarrow n=16$$

Vậy với $n=16$ thì các phân số $\frac{5}{n+8}; \frac{6}{n+9}; \dots; \frac{17}{n+20}$ đều tối giản.

Bài 8: Tìm $n \in \mathbb{N}, n > 2$ để phân số $\frac{n+7}{n-2}$ tối giản.

Lời giải

Ta có phân số $\frac{n+7}{n-2}$ tối giản nên $UCLN(n+7, n-2) = 1$

Mà $(n+7)-(n-2)=9$ nên $UCLN(n-2;9)=1$

Do đó $n-2 \nmid 3$

Đặt $n-2 \neq 3a (a \in \mathbb{N})$

Vậy $n \neq 2+3a (a \in \mathbb{N})$

Bài 9: Chứng minh rằng $5n^2 + 1 \vdots 6$, với $n \in \mathbb{N}$ thì $\frac{n}{2}; \frac{n}{3}$ là các phân số tối giản.

Lời giải

Vì với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $5n^2 + 1 \vdots 6 \Rightarrow n^2 \text{ lẻ} \Rightarrow n \text{ lẻ}$ và n không chia hết cho 3

Vậy $\frac{n}{2}; \frac{n}{3}$ là các phân số tối giản.

Bài 10: Chứng tỏ rằng nếu $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì:

a) Phân số $\frac{a+b}{b}$ cũng là phân số tối giản, suy ra $\frac{246913579}{123456790}$ là tối giản.

b) Phân số $\frac{a-b}{b}$ hoặc $\frac{b-a}{b}$ cũng là phân số tối giản.

Lời giải

a) Vì phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nên $UCLN(a,b)=1$

mà $UCLN(a,b)=UCLN(a+b,b)=1$

Do đó phân số $\frac{a+b}{b}$ là phân số tối giản.

Suy ra $\frac{246913579}{123456790} = \frac{123456789}{123456790} + 1$

Mà $\frac{123456789}{123456790}$ là phân số tối giản

Vậy $\frac{246913579}{123456790}$ là phân số tối giản.

b) Ta có phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nên $UCLN(a, b) = 1$

mà $UCLN(a, b) = UCLN(a - b, b) = UCLN(b - a, b) = 1$

nên phân số $\frac{a-b}{b}$ hoặc $\frac{b-a}{b}$ là phân số tối giản.

Bài 11: CMR nếu $(a-1; b+1)=1$ thì $A = \frac{3a+5b+2}{5a+8b+3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d = UCLN(3a+5b+2; 5a+8b+3) \Rightarrow 5(3a+5b+2) - 3(5a+8b+3) : d$
 $\Rightarrow b+1 : d \quad (1)$

Và $8(3a+5b+2) - 5(5a+8b+3) : d \Rightarrow a-1 : d \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d \in UC(a-1; b+1)$

Mà $UCLN(a-1; b+1) = 1 \Rightarrow d = \pm 1$

Vậy nếu $(a-1; b+1) = 1$ thì $A = \frac{3a+5b+2}{5a+8b+3}$ là phân số tối giản.

Dạng 5: Tìm phân số tối giản thỏa mãn điều kiện cho trước

I. Phương pháp giải

Dùng định nghĩa hai phân số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) mà giá trị của nó không đổi khi cộng thêm tử với 4, mẫu với 10.

Lời giải

Với $b \neq 0$, ta có:

Khi cộng thêm tử với 4, mẫu với 10 vào phân số $\frac{a}{b}$ ta được phân số $\frac{a+4}{b+10}$

Lúc này ta có: $\frac{a}{b} = \frac{a+4}{b+10}$

Từ tính chất hai phân số bằng nhau đã học ta có $a(b+10) = b(a+4)$

Suy ra $10a = 4b$ nên $\frac{a}{b} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$.

Bài 2: Tìm phân số tối giản biết rằng khi cộng mẫu vào tử và cộng mẫu vào mẫu thì giá trị của phân số đó tăng lên gấp 2 lần.

Lời giải

Gọi phân số cần tìm là $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), theo đề bài ta có: $\frac{a+b}{b+b} = \frac{2a}{b}$ hay $\frac{a+b}{2b} = \frac{2a}{b}$

suy ra $ab + bb = 4ab$ hay $3ab = bb$

suy ra $\frac{ab}{bb} = \frac{1}{3}$ hay $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ (vì $b \neq 0$)

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$.

Bài 3: Tìm phân số dương tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) nhỏ nhất sao cho khi nhân phân số này với các phân số

$\frac{14}{5}; \frac{12}{25}$ thì kết quả là các số nguyên dương.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b} \cdot \frac{14}{5} = \frac{14a}{5b} \in \mathbb{N}$

Mà $UCLN(a, b) = 1$ nên a là bội của 5 và b là ước của 14 (1)

Lại có $\frac{a}{b} \cdot \frac{12}{25} = \frac{12a}{25b} \in \mathbb{N}$

Mà $UC(a.b) = 1$ nên a là bội của 25 và b là ước của 12 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = BCNN(5; 25) = 25$; $b = UCLN(14; 12) = 2$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{25}{2}$.

Bài 4: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \in N^*$) biết rằng lấy tử cộng với 6, lấy mẫu cộng với 14 thì được một phân số bằng $\frac{3}{7}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a+6}{b+14} = \frac{3}{7}$$

$$\text{Suy ra } 7(a+6) = 3(b+14)$$

$$7a + 42 = 3b + 42$$

$$7a = 3b$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{7}.$$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$.

Bài 5: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \in N^*$) biết rằng lấy tử cộng với 7, lấy mẫu cộng với 20 thì giá trị của phân số không đổi.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a+7}{b+20} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Suy ra } b(a+7) = a(b+20)$$

$$ab + 7b = ab + 20a$$

$$7b = 20a$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{20}.$$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{7}{20}$.

Bài 6: Tìm một phân số tối giản biết rằng khi cộng mẫu vào tử để có tử mới và lấy mẫu trừ tử để có mẫu mới thì được một số chính phương chẵn bé nhất.

Lời giải

Gọi phân số cần tìm là $\frac{a}{b}$ ($b \in \mathbb{N}^*$, $a \neq b$), theo đề bài ta có: $\frac{a+b}{b-a} = 4$

suy ra $a+b = 4b-4a$ hay $5a = 3b$

suy ra $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

Bài 7: Tìm phân số tối giản có mẫu là 11, biết rằng khi cộng tử với -18 , nhân mẫu với 7 thì được một phân số bằng phân số ban đầu.

Lời giải

Gọi phân số cần tìm là $\frac{x}{11}$ ($x \in \mathbb{Z}$). Theo đề bài ta có:

$$\frac{x}{11} = \frac{x+(-18)}{11 \cdot 7}$$

$$\Rightarrow \frac{7x}{11 \cdot 7} = \frac{x+(-18)}{11 \cdot 7} \Rightarrow 7x = x - 18$$

$$\Rightarrow 6x = -18$$

$$\Rightarrow x = -3$$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{-3}{11}$.

Bài 8: Tìm một phân số khi chưa tối giản có tổng của tử và mẫu là 1100, sau khi rút gọn được $\frac{3}{7}$. Tìm phân số ban đầu.

Lời giải

Phân số ban đầu cần tìm $\frac{3n}{7n}$ và $3n + 7n = 1100$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Hay $10n = 1100 \Rightarrow n = 110$

Vậy phân số ban đầu là $\frac{330}{770}$.

Bài 9: a) Với a là một số nguyên tố nào thì phân số $\frac{a}{74}$ là phân số tối giản.

b) Với b là một số nguyên tố nào thì phân số $\frac{b}{225}$ là phân số tối giản.

Lời giải

a) Ta có $\frac{a}{74} = \frac{a}{2 \cdot 37}$ là phân số tối giản khi a là số nguyên tố khác 2 và 37.

b) Ta có $\frac{b}{225} = \frac{b}{3^2 \cdot 5^2}$ là phân số tối giản khi b là số nguyên tố khác 3 và 5.

Bài 10: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để $\frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5} = \frac{255}{1083}$.

Lời giải

Gọi $UCLN(n^3 + 5n + 1; n^4 + 6n^2 + n + 5) = d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) suy ra

$$\begin{cases} n^3 + 5n + 1 : d \\ n^4 + 6n^2 + n + 5 : d \end{cases} \Rightarrow [(n^4 + 6n^2 + n + 5) - n(n^3 + 5n + 1)] : d$$

Hay $n^2 + 5 : d$

Do đó $[(n^3 + 5n + 1) - n(n^2 + 5)] : d$ hay $1 : d \Rightarrow d = 1$

Ta có $\frac{255}{1083} = \frac{85}{361}$

$\frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5}; \frac{85}{361}$ tối giản và $\frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5} = \frac{85}{361}$

Vì dạng tối giản của phân số là duy nhất nên

$$\begin{cases} n^3 + 5n + 1 = 85 \\ n^4 + 6n^2 + n + 5 = 361 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 5n + 1 = 85 \\ n(n^3 + 5n + 1) + n^2 + 5 = 361 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^2 + 85n - 356 = 0$$

$$n^2 - 4n + 89n - 365 = 0$$

$$n(n - 4) + 89(n - 4) = 0$$

$$(n - 4)(n + 89) = 0$$

$$\Rightarrow n - 4 = 0 \text{ (vì } n + 89 > 0 \text{)}$$

$$n = 4$$

$$\text{Vậy với } n = 4 \text{ thì } \frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5} = \frac{255}{1083}$$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: (HUYỆN HOA LƯU NĂM 2020-2021)

Cho $A = \frac{2n+5}{n+3}$. Chứng tỏ A là phân số tối giản.

Lời giải

ĐK: $n \neq 3$

Gọi $UCLN(n+3, 2n+5) : d$

$$\Rightarrow (n+3) : d; (2n+5) : d$$

$$\Rightarrow 2(n+3) : d; (2n+5) : d$$

$$\Rightarrow [(2n+6) - (2n+5)] : d$$

$$\Rightarrow 1 : d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy A là phân số tối giản

Bài 2: (HUYỆN PHÙ CÁT NĂM 2020-2021)

Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $UCLN(n+1, 3n-1) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 : d \\ 3n-1 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n+3 : d \\ 3n-1 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3n+3) - (3n-1) : d$$

$$\Rightarrow 4 : d$$

$$\Rightarrow d \in \{1; 2; 4\}$$

Để $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản thì $d \notin \{2; 4\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 \not\vdots 2 \\ n+1 \not\vdots 4 \end{cases} \Rightarrow n+1 \not\vdots 2$$

$$\Rightarrow n+1 \neq 2k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow n \neq 2k-1$$

Vậy $n \neq 2k-1 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$ thì phân số $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản

Bài 3: (HUYỆN THANH BA NĂM 2020-2021)

Chứng minh phân số sau là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n : $\frac{12n+1}{30n+2}$.

Lời giải

$$\text{Gọi } UCLN(12n+1, 30n+2) = d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+1 : d \\ 30n+2 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+1) : d \\ 2(30n+2) : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+5) - (60n+4) : d$$

$$\Rightarrow 1 : d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Bài 4: (HUYỆN CHƯƠNG MỸ NĂM 2020-2021)

$$\text{Cho phân số } P = \frac{3n+5}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

a) Chứng tỏ rằng phân số P tối giản.

b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của biểu thức P.

Lời giải

$$\text{Cho phân số } P = \frac{3n+5}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

a) Gọi $UCLN(3n+5, n+2) = d$

$$\Rightarrow 3n+5 : d \text{ và } n+2 : d$$

$$\Rightarrow 3(n+2) - (3n+5) : d$$

$$\Rightarrow 1 : d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Suy ra phân số $P = \frac{3n+5}{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}$) tối giản.

b) Ta có: $P = \frac{3n+5}{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

$$P = \frac{3(n+2)-1}{n+2}$$

$$P = 3 - \frac{1}{n+2}$$

Để P đạt giá trị lớn nhất thì $\frac{1}{n+2}$ đạt giá trị âm nhỏ nhất, mà $n \in \mathbb{Z}$ nên $n+2$ đạt giá trị nguyên âm lớn nhất khi $n = -3$.

Khi đó giá trị lớn nhất của P là: $P = 3 - \frac{1}{-3+2} = 4$.

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì $\frac{1}{n+2}$ đạt giá trị dương lớn nhất; mà $n \in \mathbb{Z}$ nên $n+2$ đạt giá trị nguyên dương nhỏ nhất khi $n = -1$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là: $P = 3 - \frac{1}{-1+2} = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 4, đạt tại $n = -3$

Giá trị nhỏ nhất của P bằng 2, đạt tại $n = -1$.

Bài 5: (HSG SƠN TĨNH NĂM 2020-2021)

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n , phân số $\frac{12n+5}{15n+6}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $UCLN(12n+5, 15n+6) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+5 : d \\ 15n+6 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+5) : d \\ 4(15n+6) : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+25) - (60n+24) : d$$

$$\Rightarrow 1 : d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{12n+5}{15n+6}$ là phân số tối giản.

Bài 6: (HUYỆN NHO QUAN NĂM 2020-2021)

Chứng tỏ rằng với n là số nguyên dương thì $\frac{14n+3}{24n+5}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d = \text{ƯCLN}(14n+3; 24n+5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14n+3 \vdots d \\ 24n+5 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12.(14n+3) \vdots d \\ 7.(24n+5) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 168n+36 \vdots d \\ 168n+35 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (168n+36) - (168n+35) \vdots d$$

$$\Rightarrow 168n+36 - 168n - 35 \vdots d$$

$$\Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$$

Vậy: phân số $\frac{14n+3}{24n+5}$ là phân số tối giản với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 7: (HUYỆN TRIỆU SƠN NĂM 2020-2021)

Tìm các số tự nhiên n để phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d = \text{ƯC}(1-3n; 2n-3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-3n \vdots d \\ 2n-3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.(1-3n) \vdots d \\ 3.(2n-3) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-6n \vdots d \\ 6n-9 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2-6n) + (6n-9) \vdots d$$

$$\Rightarrow 2-6n+6n-9 \vdots d$$

$$\Rightarrow -7 \vdots d \Rightarrow d = \{\pm 1; \pm 7\}$$

Để phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 7$

Hay $2n-3$ không chia hết cho 7

$$\Rightarrow 2n-3 \neq 7k$$

$$\Rightarrow 2n-3-7 \neq 7k$$

$$\Rightarrow 2n-10 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n-5 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n \neq 7k+5$$

Vậy: với $n \neq 7k+5$ phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản.

Bài 8: (THỊ XÃ THÁI HÒA NĂM 2020-2021)

Chứng minh rằng phân số $\frac{4n+1}{6n+1}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

Gọi $d = \text{ƯCLN}(4n+1; 6n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n+1 \vdots d \\ 6n+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.(4n+1) \vdots d \\ 2.(6n+1) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12n+3 \vdots d \\ 12n+2 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (12n+3) - (12n+2) \vdots d$$

$$\Rightarrow 12n+3-12n-2 \vdots d$$

$$\Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{4n+1}{6n+1}$ là phân số tối giản với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 9: (HUYỆN ANH SƠN NĂM 2020-2021)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $\frac{3n+2}{5n+3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d = ƯCLN(3n+2; 5n+3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2 \vdots d \\ 5n+3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5.(3n+2) \vdots d \\ 3.(5n+3) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15n+10 \vdots d \\ 15n+9 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (15n+10) - (15n+9) \vdots d$$

$$\Rightarrow 15n+10 - 15n - 9 \vdots d$$

$$\Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{3n+2}{5n+3}$ là phân số tối giản với $n \in \mathbb{Z}$.

Bài 10: (HUYỀN PHÚ LƯƠNG NĂM 2020-2021)

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:

$$\frac{7}{n+9}; \frac{8}{n+10}; \frac{9}{n+11}; \dots; \frac{100}{n+102}$$

Lời giải

Ta có các phân số đã cho đều có dạng $\frac{x}{x+(n+2)}$ với $x \in \{7; 8; 9; \dots; 100\}$

Do đó để các phân số đều tối giản thì x và $n+2$ phải nguyên tố cùng nhau.

Suy ra $n+2$ phải nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số $7; 8; 9; \dots; 100$

$$\Rightarrow n+2 \text{ là số nguyên tố nhỏ nhất và lớn hơn } 100$$

$$\Rightarrow n+2 = 101$$

$$\Rightarrow n = 99$$

♾️HẾT♾️

CHUYÊN ĐỀ PHÂN SỐ**CHỦ ĐỀ 3: SO SÁNH HAI PHÂN SỐ****PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****1. SO SÁNH HAI PHÂN SỐ CÙNG MẪU**

Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

2. SO SÁNH HAI PHÂN SỐ KHÔNG CÙNG MẪU

Muốn so sánh hai phân số không cùng mẫu số, ta viết chúng dưới dạng hai phân số cùng mẫu dương rồi so sánh các tử số với nhau.

Tuy nhiên, nhiều bài toán sẽ gặp khó khăn khi quy đồng mẫu số các phân số. Bởi vậy, có rất nhiều cách khác nhau để so sánh các phân số, ta sẽ đi tìm hiểu ở phần sau.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**Dạng 1: So sánh hai phân số cùng mẫu*****I. Phương pháp giải***

Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

II. Bài toán

Bài 1: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần: $\frac{7}{36}, \frac{24}{36}, \frac{13}{36}, \frac{1}{36}, \frac{43}{36}, \frac{36}{36}$

Lời giải:

Vì các phân số trên đều có cùng mẫu số nên ta được:

$$\frac{1}{36} < \frac{7}{36} < \frac{13}{36} < \frac{24}{36} < \frac{36}{36} < \frac{43}{36}$$

Bài 2: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự giảm dần: $\frac{-5}{48}, \frac{11}{-48}, \frac{-7}{48}, \frac{13}{-48}, \frac{9}{-48}, \frac{-27}{48}$.

Lời giải:

Viết lại các phân số dưới dạng mẫu dương:

$$\frac{11}{-48} = \frac{-11}{48}; \frac{13}{-48} = \frac{-13}{48}; \frac{9}{-48} = \frac{-9}{48}.$$

Vì $-27 < -13 < -11 < -9 < -7 < -5$ nên $\frac{-27}{48} < \frac{-13}{48} < \frac{-11}{48} < \frac{-9}{48} < \frac{-7}{48} < \frac{-5}{48}$.

Vậy các phân số được sắp xếp theo thứ tự giảm dần là:

$$\frac{-5}{48}; \frac{-7}{48}; \frac{-9}{48}; \frac{-11}{48}; \frac{-13}{48}; \frac{-27}{48}.$$

Bài 3: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần: $\frac{-15}{24}, \frac{-36}{24}, \frac{2}{24}, \frac{-7}{24}, \frac{1}{24}, \frac{-72}{24}, \frac{-97}{24}$.

Lời giải:

Vì $-97 < -72 < -36 < -15 < -7 < 1 < 2$ nên $\frac{-97}{24} < \frac{-72}{24} < \frac{-36}{24} < \frac{-15}{24} < \frac{-7}{24} < \frac{1}{24} < \frac{2}{24}$

Vậy các phân số được sắp xếp theo thứ tự giảm dần là:

$$\frac{-97}{24}; \frac{-72}{24}; \frac{-36}{24}; \frac{-15}{24}; \frac{-7}{24}; \frac{1}{24}; \frac{2}{24}.$$

Bài 4: Viết các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 1 mà có mẫu là 7. Sắp xếp các phân số đó theo thứ tự tăng dần.

Lời giải:

Các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 1 mà có mẫu là 7 là:

$$\frac{1}{7} < \frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{5}{7} < \frac{6}{7} < \frac{7}{7}$$

Bài 5: Viết các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 4. Sắp xếp các phân số đó theo thứ tự tăng dần.

Lời giải:

Các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 4 là:

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4} < \frac{4}{4} < \frac{5}{4} < \frac{6}{4} < \frac{7}{4} < \frac{8}{4}$$

Bài 6: Viết các phân số lớn hơn hoặc bằng -1 và nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 7. Sắp xếp các phân số đó theo thứ tự giảm dần.

Lời giải:

Các phân số lớn hơn hoặc bằng -1 và nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 7 là:

$$\frac{14}{7} > \frac{13}{7} > \frac{12}{7} > \frac{11}{7} > \frac{10}{7} > \frac{9}{7} > \frac{8}{7} > \frac{7}{7} > \frac{6}{7} > \frac{5}{7} > \frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7} > \frac{0}{7} > \frac{-1}{7} > \frac{-2}{7} > \frac{-3}{7} > \frac{-4}{7} > \frac{-5}{7} > \frac{-6}{7} > \frac{-7}{7}$$

Bài 7: Điền số thích hợp vào chỗ chấm: $\frac{-9}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{-4}{11}$.

Lời giải:

Do các phân số đều có cùng mẫu (dương) nên ta sẽ điền tử số là dãy các số nguyên tăng dần.

Vậy ta điền được kết quả là: $\frac{-9}{11} < \frac{-8}{11} < \frac{-7}{11} < \frac{-6}{11} < \frac{-5}{11} < \frac{-4}{11}$.

Bài 8: Điền số thích hợp vào chỗ trống

a) $\frac{-11}{13} < \frac{\dots}{13} < \frac{\dots}{13} < \frac{\dots}{13} < \frac{-7}{13}$

b) $\frac{-8}{34} < \frac{\dots}{34} < \frac{\dots}{34} < \frac{\dots}{34} < \frac{-4}{34}$

Lời giải:

a) $\frac{-11}{13} < \frac{-10}{13} < \frac{-9}{13} < \frac{-8}{13} < \frac{-7}{13}$

b) $\frac{-8}{34} < \frac{-7}{34} < \frac{-6}{34} < \frac{-5}{34} < \frac{-4}{34}$

Bài 9: Tìm số x nguyên thỏa mãn:

a) $\frac{1}{7} < \frac{x}{7} < \frac{4}{7}$

b) $\frac{-11}{15} < \frac{x}{15} < \frac{-8}{15}$

c) $\frac{3}{7} < \frac{x}{21} < \frac{2}{3}$

Lời giải:

a) $\frac{1}{7} < \frac{x}{7} < \frac{4}{7} \Rightarrow x \in \{2; 3\}$

b) $\frac{-11}{15} < \frac{x}{15} < \frac{-8}{15} \Rightarrow x \in \{-10; -9\}$

c) $\frac{3}{7} < \frac{x}{21} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{9}{21} < \frac{x}{21} < \frac{14}{21} \Rightarrow x \in \{10; 11; 12; 13\}$

Dạng 2: So sánh hai phân số không cùng mẫu bằng cách quy đồng mẫu dương

I. Phương pháp giải

Quy đồng mẫu dương rồi so sánh các tử: Tử nào lớn hơn thì phân số đó lớn hơn

II. Bài toán

Bài 1: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu: a) $\frac{1}{3}$ và $\frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{5}$ và $\frac{3}{7}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ mà $\frac{2}{6} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{5}{6}$

b) Ta có $\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$; $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$ mà $\frac{28}{35} > \frac{15}{35} \Rightarrow \frac{4}{5} > \frac{3}{7}$.

Bài 2: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu:

a) $\frac{-3}{11}$ và $\frac{-4}{13}$

b) $\frac{-5}{6}$ và $\frac{63}{-70}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{-3}{11} = \frac{-39}{143}$; $\frac{-4}{13} = \frac{-44}{143}$ mà $\frac{-39}{143} > \frac{-44}{143} \Rightarrow \frac{-3}{11} > \frac{-4}{13}$

b) Ta có $\frac{-5}{6} = \frac{-50}{60}$; $\frac{63}{-70} = \frac{-9}{10} = \frac{-54}{60}$ mà $\frac{-50}{60} > \frac{-54}{60} \Rightarrow \frac{-5}{6} > \frac{63}{-70}$.

Bài 3: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu:

a) $\frac{1}{2}$ và $\frac{5}{6}$

b) $\frac{4}{7}$ và $\frac{5}{9}$

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Vì $3 < 5$ nên $\frac{3}{6} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{5}{6}$

b) Ta có: $\frac{4}{7} = \frac{36}{63}$; $\frac{5}{9} = \frac{35}{63}$. Vì $36 > 35$ nên $\frac{36}{63} > \frac{35}{63} \Rightarrow \frac{4}{7} > \frac{5}{9}$

Bài 4: So sánh các phân số sau:

a) $\frac{45}{105}$ và $\frac{84}{147}$;

b) $\frac{39}{52}$ và $\frac{98}{112}$;

Lời giải:

a) $\frac{45}{105} = \frac{3}{7}$; $\frac{84}{147} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{45}{105} < \frac{84}{147}$.

b) $\frac{39}{52} = \frac{3}{4}$; $\frac{98}{112} = \frac{7}{8}$; $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} < \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{39}{52} < \frac{98}{112}$.

Bài 5: So sánh các phân số :

a) $\frac{20}{19}$ và $\frac{21}{20}$

b) $\frac{12}{129}$ và $\frac{21}{172}$

c) $\frac{63}{81}$ và $\frac{103}{135}$

Lời giải:

a) Vì $(19, 20) = 1$ nên mẫu chung là $19 \cdot 20$.

$$\text{Ta có : } \frac{20}{19} = \frac{20 \cdot 20}{19 \cdot 20} = \frac{400}{380}; \quad \frac{21}{20} = \frac{21 \cdot 19}{20 \cdot 19} = \frac{399}{380}$$

$$\text{Vì } 400 > 399 \text{ nên } \frac{20}{19} > \frac{21}{20}.$$

$$\text{b) Ta rút gọn các phân số trước : } \frac{12}{129} = \frac{4}{43}$$

$$\text{Chú ý là } 172 = 43 \cdot 4, \text{ nên ta viết : } \frac{4}{43} = \frac{4 \cdot 4}{43 \cdot 4} = \frac{16}{172}$$

$$\text{Do } \frac{16}{172} < \frac{21}{172} \text{ nên } \frac{4}{43} < \frac{21}{172} \text{ hay } \frac{12}{129} < \frac{21}{172}$$

$$\text{c) Ta có : } \frac{63}{81} = \frac{7}{9} \quad \text{và} \quad 135 = 15 \cdot 9 \text{ nên ta biến đổi như sau :}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 15}{9 \times 15} = \frac{105}{135}, \text{ do } 105 > 103 \text{ nên } \frac{105}{135} > \frac{103}{135} \Rightarrow \frac{63}{81} > \frac{103}{135}$$

Bài 6: Cho các phân số: $\frac{42}{105}; \frac{144}{192}; \frac{435}{290}; \frac{1950}{910}; \frac{25025}{24024}$

1. Quy đồng mẫu của các phân số ấy.
2. Sắp xếp các phân số theo thứ tự tăng dần.

Lời giải:

1) Quy đồng mẫu chung, ta được các phân số tương ứng là:

$$\frac{336}{840}; \frac{630}{840}; \frac{1260}{840}; \frac{1800}{840}; \frac{875}{840}.$$

2) Sau khi so sánh, ta xếp được các số theo thứ tự tăng dần như sau:

$$\frac{42}{105}; \frac{144}{192}; \frac{25025}{24024}; \frac{435}{290}; \frac{1950}{910}.$$

Bài 7: Tìm số nguyên dương x sao cho $\frac{1}{5} < \frac{x}{30} < \frac{1}{4}$.

Lời giải:

Trước tiên ta sẽ quy đồng mẫu số các phân số:

$$\frac{1}{5} = \frac{1.12}{5.12} = \frac{12}{60}, \frac{x}{30} = \frac{x.2}{30.2} = \frac{2x}{60}, \frac{1}{4} = \frac{1.15}{4.15} = \frac{15}{60}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{5} < \frac{x}{30} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{12}{60} < \frac{2x}{60} < \frac{15}{60} \text{ Suy ra } 2x = 13 \text{ hoặc } 2x = 14$$

Mà x là số nguyên dương $\Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$.

Bài 8: Tìm số nguyên dương x , biết:

$$\text{a) } \frac{3}{x} \geq 1; \quad \text{b) } 1 < \frac{4}{x} \leq 2; \quad \text{c) } \frac{6}{x} < \frac{x}{3} < \frac{13}{x}.$$

Lời giải:

$$\text{a) } \frac{3}{x} \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{x} \geq \frac{x}{x} \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}.$$

$$\text{b) } 1 < \frac{4}{x} \leq 2 \Rightarrow \frac{x}{x} < \frac{4}{x} \leq \frac{2x}{x} \Rightarrow x < 4 \leq 2x \Rightarrow 2 \leq x < 4 \Rightarrow x \in \{2; 3\}.$$

$$\text{c) } \frac{6}{x} < \frac{x}{3} < \frac{13}{x} \Rightarrow \frac{18}{3x} < \frac{x^2}{3x} < \frac{39}{3x} \Rightarrow 18 < x^2 < 39 \Rightarrow x^2 \in \{25; 36\}$$

$$\Rightarrow x \in \{5; 6\} \text{ (vì } x > 0).$$

Bài 9: Tìm $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $\frac{9}{56} < \frac{a}{8} < \frac{b}{7} < \frac{13}{28}$.

Lời giải:

$$\text{Từ } \frac{9}{56} < \frac{a}{8} < \frac{b}{7} < \frac{13}{28} \text{ suy ra } \frac{9}{56} < \frac{7a}{56} < \frac{8b}{56} < \frac{26}{56} \Rightarrow 9 < 7a < 8b < 26.$$

Vì $a, b \in \mathbb{Z}$, từ đó ta tìm được $a = 2, b = 2$; $a = 2, b = 3$; $a = 3, b = 3$.

Bài 10: Tìm ba phân số có mẫu khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{4}$ và nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

Lời giải:

Quy đồng các phân số với mẫu số chung là 48, ta được:

$$\frac{1}{4} = \frac{1.12}{4.12} = \frac{12}{48}; \quad \frac{1}{3} = \frac{1.16}{3.16} = \frac{16}{48}.$$

Ta có: $\frac{12}{48} < \frac{13}{48} < \frac{14}{48} < \frac{15}{48} < \frac{16}{48}$

Rút gọn các phân số trên ta được: $\frac{1}{4} < \frac{13}{48} < \frac{7}{24} < \frac{5}{16} < \frac{1}{3}$.

Vậy ba phân số cần tìm là: $\frac{13}{48}$; $\frac{7}{24}$ và $\frac{5}{16}$.

Bài 11: Tìm hai phân số có mẫu khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{5}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

Quy đồng hai phân số $\frac{1}{5}$ và $\frac{1}{4}$ với mẫu số chung là 60, ta được:

$$\frac{1}{5} = \frac{1.12}{5.12} = \frac{12}{60}; \quad \frac{1}{4} = \frac{1.15}{4.15} = \frac{15}{60}.$$

Ta có: $\frac{12}{60} < \frac{13}{60} < \frac{14}{60} < \frac{15}{60}$.

Rút gọn các phân số trên ta được: $\frac{1}{5} < \frac{13}{60} < \frac{7}{30} < \frac{1}{4}$.

Vậy hai phân số cần tìm là: $\frac{13}{60}$ và $\frac{7}{30}$.

Bài 12: Tìm hai phân số có mẫu số khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{3}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn mẫu chung là 18, ta có: $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}; \quad \frac{1}{2} = \frac{9}{18}$.

Ta có $\frac{6}{18} < \frac{7}{18} < \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$

Rút gọn các phân số này ta được: $\frac{1}{3} < \frac{7}{18} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$.

Ta tìm được hai phân số $\frac{7}{18}$ và $\frac{4}{9}$ có mẫu khác nhau, lớn hơn $\frac{1}{3}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

Nhận xét:

Có nhiều cặp phân số thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Chẳng hạn, chọn mẫu chung là 120,

ta có: $\frac{1}{3} = \frac{40}{120}$; $\frac{1}{2} = \frac{60}{120}$.

Trong các phân số từ $\frac{41}{120}$ đến $\frac{59}{120}$ ta có thể chọn các cặp như: $\frac{41}{120}$ và $\frac{42}{120} = \frac{21}{60}$ hoặc $\frac{44}{120} = \frac{11}{30}$ và $\frac{45}{120} = \frac{15}{40}$... đều thỏa mãn bài toán.

Bài 13: Tìm các phân số có mẫu số là 5 và nhỏ hơn $\frac{1}{2}$, lớn hơn $\frac{1}{3}$

Lời giải:

Phân số có dạng: $\frac{1}{3} < \frac{a}{5} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{10}{30} < \frac{6a}{30} < \frac{15}{30}$

Suy ra $6a = 12 \Rightarrow a = 2$

Vậy phân số cần tìm là: $\frac{2}{5}$

Bài 14: Tìm ba phân số mà lớn hơn $\frac{-1}{3}$ và nhỏ hơn $\frac{-1}{4}$.

Lời giải:

Gọi phân số cần tìm $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$)

Ta có: $-\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{16}{48} < \frac{a}{b} < -\frac{12}{48}$

Lấy $b = 48$ và $a \in \{-13, -14, -15\}$ ta được các phân số: $\frac{-13}{48}; \frac{-14}{48}; \frac{-15}{48}$.

Bài 15: Hãy tìm các phân số, thỏa mãn mỗi điều kiện sau

a) Có mẫu là 30, lớn hơn $\frac{5}{17}$ và nhỏ hơn $\frac{6}{17}$:

b) Có mẫu là 5, lớn hơn $\frac{2}{-3}$ và nhỏ hơn $\frac{1}{-6}$;

Trong mỗi trường hợp trên hãy sắp xếp các phân số theo thứ tự từ nhỏ đến lớn

Lời giải:

a) Gọi phân số cần tìm là $\frac{a}{30}$. trong đó $a \in \mathbb{Z}$, ta có: $\frac{5}{17} < \frac{a}{30} < \frac{6}{17}$

Quy đồng mẫu chung của ba phân số, ta được: $\frac{150}{510} < \frac{17a}{510} < \frac{180}{510}$

Suy ra $150 < 17a < 180$, do đó $\frac{150}{17} < a < \frac{180}{17}$, mà $a \in \mathbb{Z}$, nên $a \in \{9; 10\}$.

Có hai phân số phải tìm là: $\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$ và $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Sắp xếp các phân số theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: $\frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{6}{17}$.

b) Gọi phân số phải tìm là $\frac{b}{5}$ ($b \in \mathbb{Z}$), ta có: $\frac{2}{-3} < \frac{b}{5} < \frac{1}{-6}$

Biến đổi các phân số đã cho sao cho có mẫu dương, ta được: $\frac{-2}{3} < \frac{b}{5} < \frac{-1}{6}$

Quy đồng mẫu các phân số: $\frac{-20}{30} < \frac{6b}{30} < \frac{-5}{30}$, suy ra $-20 < 6b < -5$

Do đó $-3\frac{1}{3} < b < -\frac{5}{6}$, mà $b \in \mathbb{Z}$, nên $b = -3; -2$ và -1 .

Ba số phải tìm là: $\frac{-3}{5}; \frac{-2}{5}$ và $\frac{-1}{5}$.

Sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: $\frac{-2}{3} < \frac{-3}{5} < \frac{-2}{5} < \frac{-1}{5} < \frac{-1}{6}$.

Bài 16: Cho hai phân số $\frac{1}{6}$ và $\frac{2}{3}$. Hãy tìm :

a) Năm phân số có tử và mẫu cùng là số dương, sao cho các phân số đó lớn hơn $\frac{2}{6}$ và nhỏ hơn $\frac{2}{3}$;

b) Hai mươi phân số có tử và mẫu cùng là số dương, sao cho các phân số lớn hơn $\frac{1}{6}$ và nhỏ hơn $\frac{2}{3}$;

c) Có nhận xét gì về số các phân số có tử và mẫu cùng là số dương, sao cho phân số đó lớn hơn $\frac{1}{6}$ và nhỏ hơn $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

a) Quy đồng mẫu chung hai phân số $\frac{1}{6}$ và $\frac{2}{3}$, chú ý chọn mẫu sao cho xen giữa hai phân số này có 5 phân số. Ta có: $\frac{1}{6} < \frac{3}{12} < \frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12}$;

b) Tương tự a), chọn mẫu chung là 42. Các phân số cần tìm là: $\frac{8}{42}, \frac{9}{42}, \frac{10}{42}, \dots, \frac{25}{42}, \frac{26}{42}, \frac{27}{42}$.

c) Có nhiều phân số thỏa mãn đề bài. Các phân số cần tìm phụ thuộc vào cách tìm mẫu chung. Nếu mẫu chung càng lớn thì số các phân số cần tìm càng lớn. Chẳng hạn chọn mẫu chung là 120, khi đó $\frac{1}{6} = \frac{20}{120}$ và $\frac{2}{3} = \frac{80}{120}$, vì thế xen giữa hai phân số $\frac{20}{120}$ và $\frac{80}{120}$ có 59 phân số là: $\frac{21}{120}, \frac{22}{120}, \frac{23}{120}, \dots, \frac{77}{120}, \frac{78}{120}, \frac{79}{120}$.

Bài 17: So sánh hai phân số sau: $A = \frac{10^{19} + 1}{10^{20} + 1}$ và $B = \frac{10^{20} + 1}{10^{21} + 1}$

Lời giải:

Quy đồng mẫu hai phân số với MC: $(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)$, ta có :

$$A = \frac{(10^{19} + 1)(10^{21} + 1)}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)} = \frac{10^{40} + 10^{21} + 10^{19} + 1}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)};$$

$$B = \frac{(10^{20} + 1)(10^{20} + 1)}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)} = \frac{10^{40} + 10^{20} + 10^{20} + 1}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)}$$

Hãy chứng tỏ rằng $10^{21} + 10^{19} > 10^{20} + 10^{20}$ để suy ra $10^{40} + 10^{21} + 10^{19} + 1 > 10^{40} + 10^{20} + 10^{20} + 1$.

Từ đó có $A > B$.

Dạng 3: So sánh hai phân số không cùng mẫu bằng cách quy đồng tử

I. Phương pháp giải

Quy đồng tử dương rồi so sánh các mẫu: Mẫu nào lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn

II. Bài toán

Bài 1: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng tử.

a) $\frac{3}{4}$ và $\frac{6}{7}$

b) $\frac{17}{-21}$ và $\frac{51}{-31}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ mà $\frac{6}{8} < \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{6}{7}$

b) Ta có $\frac{17}{-21} = \frac{51}{-63}$ mà $\frac{51}{-63} > \frac{51}{-31} \Rightarrow \frac{17}{-21} > \frac{51}{-31}$.

Bài 2: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng tử.

a) $\frac{-4}{9}$ và $\frac{-3}{13}$

b) $\frac{-4}{-11}$ và $\frac{-6}{-19}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{-4}{9} = \frac{-12}{27}$; $\frac{-3}{13} = \frac{-12}{52}$ mà $\frac{-12}{27} < \frac{-12}{52} \Rightarrow \frac{-4}{9} < \frac{-3}{13}$

b) Ta có $\frac{-4}{-11} = \frac{12}{33}$; $\frac{-6}{-19} = \frac{12}{38}$ mà $\frac{12}{33} > \frac{12}{38} \Rightarrow \frac{-4}{-11} > \frac{-6}{-19}$.

Bài 3: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng tử.

a) $\frac{2}{5}$ và $\frac{5}{7}$

b) $\frac{-3}{4}$ và $\frac{-6}{7}$

c) $\frac{101}{506}$ và $\frac{707}{3534}$

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{2}{5} = \frac{10}{25}$ và $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$; Vì $\frac{10}{25} < \frac{10}{14} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{5}{7}$

b) Ta có: $\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = \frac{6}{-8}$ và $\frac{-6}{7} = \frac{6}{-7}$; Vì $\frac{6}{-8} > \frac{6}{-7} \Rightarrow \frac{-3}{4} > \frac{-6}{7}$.

c) Ta có: $\frac{101}{506} = \frac{101 \times 7}{506 \times 7} = \frac{707}{3542}$

Hai phân số $\frac{707}{3542}$ và $\frac{707}{3534}$ có tử bằng nhau, nhưng $3542 > 3534$ nên $\frac{707}{3542} < \frac{707}{3534}$ hay $\frac{101}{506} < \frac{707}{3534}$.

Bài 4: So sánh các phân số sau: $A = \frac{2489-36}{7467-108}$; $B = \frac{2929-303}{8787+1717}$.

Lời giải:

$$A = \frac{2489 - 36}{3 \cdot (2489 - 36)} = \frac{1}{3}; \quad B = \frac{101 \cdot (29 - 3)}{101 \cdot (87 + 17)} = \frac{26}{104} = \frac{1}{4}.$$

Vì $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ nên $A > B$.

Bài 5: So sánh các phân số sau: $A = \frac{8056}{2012 \cdot 16 - 1982}$; $B = \frac{1 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 12 + 4 \cdot 8 \cdot 24 + 7 \cdot 14 \cdot 42}{1 \cdot 6 \cdot 9 + 2 \cdot 12 \cdot 18 + 4 \cdot 24 \cdot 36 + 7 \cdot 42 \cdot 63}$

Lời giải:

$$A = \frac{8056}{2012 \cdot 16 - 1982} = \frac{4 \cdot 2014}{2012 \cdot 15 + 2012 - 1982} = \frac{4 \cdot 2014}{2012 \cdot 15 + 30} = \frac{4 \cdot 2014}{15 \cdot (2012 + 2)} = \frac{4}{15}. \quad (1)$$

$$B = \frac{2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21)}{9 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21)} = \frac{2}{9}. \quad (2)$$

Ta có: $\frac{2}{9} = \frac{4}{18} < \frac{4}{15}$ nên từ (1) và (2) suy ra $A > B$.

Bài 6: Tìm số tự nhiên y sao cho: $\frac{5}{8} < \frac{4}{y} < \frac{5}{7}$.

Lời giải:

Trước tiên ta sẽ quy đồng tử số các phân số:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{20}{32}, \quad \frac{4}{y} = \frac{4 \cdot 5}{y \cdot 5} = \frac{20}{5y}, \quad \frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$$

Vì $\frac{5}{8} < \frac{4}{y} < \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{20}{32} < \frac{20}{5y} < \frac{20}{28}$ Suy ra $5y = 31, 5y = 30$ hoặc $5y = 29$

Mà y là số tự nhiên $\Rightarrow 5y = 30 \Rightarrow y = 6$.

Bài 7: Tìm số $x \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$\text{a) } \frac{7}{6} < \frac{7}{x} < \frac{7}{3} \quad \text{b) } \frac{17}{-5} < \frac{-17}{x} < \frac{17}{-10} \quad \text{c) } \frac{2}{3} < \frac{10}{x} < \frac{5}{6}$$

Lời giải:

$$\text{a) } \frac{7}{6} < \frac{7}{x} < \frac{7}{3} \Rightarrow 3 < x < 6 \Rightarrow x \in \{5; 4\}$$

$$\text{b) } \frac{17}{-5} < \frac{-17}{x} < \frac{17}{-10} \Rightarrow \frac{17}{-5} < \frac{17}{-x} < \frac{17}{-10} \Rightarrow 10 > x > 5 \Rightarrow x \in \{9; 8; 7; 6\}$$

$$c) \frac{2}{3} < \frac{10}{x} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{10}{15} < \frac{10}{x} < \frac{10}{12} \Rightarrow 12 < x < 15 \Rightarrow x \in \{14; 13\}.$$

Bài 8: Tìm phân số có tử số là 4 và lớn hơn $\frac{1}{7}$, nhỏ hơn $\frac{1}{5}$.

Lời giải:

Phân số cần tìm có dạng : $\frac{1}{7} < \frac{4}{b} < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4}{28} < \frac{4}{b} < \frac{4}{20}$

Suy ra: $20 < b < 28 \Rightarrow b \in \{21; 22; 23; 24; 25; 26; 27\}$

Ta có 7 phân số: $\frac{4}{21}; \frac{4}{22}; \frac{4}{23}; \frac{4}{24}; \frac{4}{25}; \frac{4}{26}; \frac{4}{27}.$

Dạng 4: So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với 1.

I. Phương pháp giải

+ Định nghĩa: Cho phân số $\frac{a}{b} < 1$, ta gọi *phần bù đến đơn vị* của phân số $\frac{a}{b}$ là hiệu $1 - \frac{a}{b}$, tức là $\frac{b-a}{b}$.

+ Nếu $\frac{a}{b} - M = 1; \frac{c}{d} - N = 1$ mà $M > N$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

- M, N là phần thừa so với 1 của 2 phân số đã cho.
- Phân số nào có phần thừa lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

+ Nếu $\frac{a}{b} + M = 1; \frac{c}{d} + N = 1$ mà $M > N$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

- M, N là phần thiếu hay phần bù đến đơn vị của 2 phân số đó.
- Phân số nào có phần bù lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn.

II. Bài toán

Bài 1: So sánh các phân số sau mà không quy đồng mẫu số và tử số:

a) $\frac{47}{57}$ và $\frac{66}{76}$

b) $\frac{23}{32}$ và $\frac{39}{48}$

Lời giải:

a) Nhận thấy hai phân số này đều lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1 nên ta sẽ sử dụng phần bù đến đơn vị.

Ta có: $1 - \frac{47}{57} = \frac{57}{57} - \frac{47}{57} = \frac{10}{57}$, $1 - \frac{66}{76} = \frac{76}{76} - \frac{66}{76} = \frac{10}{76}$

Có $\frac{10}{57} > \frac{10}{76} \Rightarrow \frac{47}{57} < \frac{66}{76}.$

b) Ta có: $1 - \frac{23}{32} = \frac{32}{32} - \frac{23}{32} = \frac{9}{32}$, $1 - \frac{39}{48} = \frac{48}{48} - \frac{39}{48} = \frac{9}{48}$

Có $\frac{9}{32} > \frac{9}{48} \Rightarrow \frac{23}{32} < \frac{39}{48}$.

Bài 2: So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với 1.

a) $\frac{26}{27}$ và $\frac{96}{97}$

b) $\frac{102}{103}$ và $\frac{103}{105}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{26}{27} + \frac{1}{27} = 1$; . . mà $\frac{1}{27} > \frac{1}{97} \Rightarrow \frac{26}{27} < \frac{96}{97}$.

b) Ta có $\frac{102}{103} + \frac{1}{103} = 1$; $\frac{103}{105} + \frac{2}{105} = 1$ mà $\frac{1}{103} = \frac{2}{206} < \frac{2}{105} \Rightarrow \frac{102}{103} > \frac{103}{105}$.

Bài 3: So sánh các phân số sau:

a) $\frac{-37}{47}$ và $\frac{-56}{66}$;

b) $\frac{-29}{38}$ và $\frac{-13}{22}$.

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{37}{47} = \frac{47-10}{47} = 1 - \frac{10}{47}$ (1)

$$\frac{56}{66} = \frac{66-10}{66} = 1 - \frac{10}{66} \quad (2)$$

Vì $\frac{10}{47} > \frac{10}{66}$ nên từ (1) và (2) suy ra $\frac{37}{47} < \frac{56}{66}$.

Do đó $\frac{-37}{47} > \frac{-56}{66}$.

b) Làm tương tự câu a) ta có: $\frac{-29}{38} < \frac{-13}{22}$.

Bài 4: So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với 1.

a) $\frac{2020}{2019}$ và $\frac{2019}{2018}$

b) $\frac{73}{64}$ và $\frac{51}{45}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{2020}{2019} - \frac{1}{2019} = 1$; $\frac{2019}{2018} - \frac{1}{2018} = 1$ mà $\frac{1}{2019} < \frac{1}{2018} \Rightarrow \frac{2020}{2019} < \frac{2019}{2018}$.

b) Ta có $\frac{73}{64} - \frac{9}{64} = 1$; $\frac{51}{45} - \frac{6}{45} = 1$ mà $\frac{9}{64} = \frac{18}{128} > \frac{6}{45} = \frac{18}{135} \Rightarrow \frac{73}{64} > \frac{51}{45}$.

Bài 5: So sánh: a) $\frac{19}{18}$ và $\frac{2005}{2004}$ b) $\frac{72}{73}$ và $\frac{98}{99}$

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{19}{18} - \frac{1}{18} = 1$ và $\frac{2005}{2004} - \frac{1}{2004} = 1$; Vì $\frac{1}{18} > \frac{1}{2004} \Rightarrow \frac{19}{18} > \frac{2005}{2004}$

b) Ta có: $\frac{72}{73} + \frac{1}{73} = 1$ và $\frac{98}{99} + \frac{1}{99} = 1$; Vì $\frac{1}{73} > \frac{1}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} < \frac{98}{99}$.

Bài 6: So sánh các phân số sau bằng cách hợp lí nhất:

a) $\frac{13}{19}$ và $\frac{47}{53}$; b) $\frac{41}{91}$ và $\frac{411}{911}$.

Lời giải:

a) $\frac{13}{19} = \frac{19-6}{19} = 1 - \frac{6}{19}$; $\frac{47}{53} = \frac{53-6}{53} = 1 - \frac{6}{53}$.

Vì $\frac{6}{19} > \frac{6}{53}$ suy ra $\frac{13}{19} < \frac{47}{53}$.

d) $\frac{41}{91} = \frac{410}{910} = \frac{910-500}{910} = 1 - \frac{500}{910}$ (1)

$\frac{411}{911} = \frac{911-500}{911} = 1 - \frac{500}{911}$ (2)

Vì $\frac{500}{910} > \frac{500}{911}$ nên từ (1) và (2) suy ra $\frac{41}{91} < \frac{411}{911}$.

Bài 7: So sánh các biểu thức sau: $A = \frac{100^{10}+1}{100^{10}-1}$; $B = \frac{100^{10}-1}{100^{10}-3}$

Lời giải:

$A = \frac{100^{10}+1}{100^{10}-1} = 1 + \frac{2}{100^{10}-1}$ (1)

$$B = \frac{100^{10} - 1}{100^{10} - 3} = 1 + \frac{2}{100^{10} - 3} \quad (2)$$

Vì $\frac{2}{100^{10} - 1} < \frac{2}{100^{10} - 3}$ nên từ (1) và (2) suy ra $A < B$.

Bài 8: So sánh: $A = \frac{2003.2004 - 1}{2003.2004}$ và $B = \frac{2004.2005 - 1}{2004.2005}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{2003.2004 - 1}{2003.2004} = \frac{2003.2004}{2003.2004} - \frac{1}{2003.2004} = 1 - \frac{1}{2003.2004}$$

$$B = \frac{2004.2005 - 1}{2004.2005} = \frac{2004.2005}{2004.2005} - \frac{1}{2004.2005} = 1 - \frac{1}{2004.2005}$$

Vì $\frac{1}{2003.2004} > \frac{1}{2004.2005}$ nên $A < B$.

Bài 9: So sánh phân số sau bằng cách nhanh nhất:

a) $\frac{2012}{2013}$ và $\frac{2013}{2014}$ b) $\frac{1006}{1007}$ và $\frac{2013}{2015}$

Lời giải:

a) Ta có: $1 - \frac{2012}{2013} = \frac{1}{2013}$; $1 - \frac{2013}{2014} = \frac{1}{2014}$.

Vì $\frac{1}{2013} > \frac{1}{2014}$ nên $\frac{2012}{2013} < \frac{2013}{2014}$

b) Ta có: $1 - \frac{1006}{1007} = \frac{1}{1007} = \frac{2}{2014}$; $1 - \frac{2013}{2015} = \frac{2}{2015}$.

Vì $\frac{2}{2014} > \frac{2}{2015}$ nên $\frac{1006}{1007} < \frac{2013}{2015}$.

Bài 10: Hãy so sánh bốn phân số:

a) $A = \frac{222221}{222222}$; b) $B = \frac{444443}{444445}$; c) $C = \frac{666664}{666667}$; d) $D = \frac{888885}{888889}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{222222-1}{222222} = 1 - \frac{1}{222222} \Rightarrow 1 - A = \frac{1}{222222} \Rightarrow \frac{1}{1-A} = 222222.$$

$$B = \frac{444445-2}{444445} = 1 - \frac{2}{444445} \Rightarrow 1 - B = \frac{2}{444445} \Rightarrow \frac{1}{1-B} = 222222 + \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{666667-3}{666667} = 1 - \frac{3}{666667} \Rightarrow 1 - C = \frac{3}{666667} \Rightarrow \frac{1}{1-C} = 222222 + \frac{1}{3}$$

$$D = \frac{888889-4}{888889} = 1 - \frac{4}{888889} \Rightarrow 1 - D = \frac{4}{888889} \Rightarrow \frac{1}{1-D} = 222222 + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{1-A} < \frac{1}{1-D} < \frac{1}{1-C} < \frac{1}{1-B} \Rightarrow A < D < C < B \text{ (Do đó } A, B, C, D < 1).$$

Dạng 6: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian

I. Phương pháp giải

1. Dùng số 0;1 làm trung gian:

a) Nếu $\frac{a}{b} > 0$ và $0 > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

b) Nếu $\frac{a}{b} > 1$ và $1 > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

2. Dùng 1 phân số hoặc số xấp xỉ làm trung gian: (Phân số này có tử là tử của phân số thứ nhất, có mẫu là mẫu của phân số thứ hai)

*Nhận xét: Trong hai phân số, phân số nào vừa có tử lớn hơn, vừa có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn (điều kiện các tử và mẫu đều dương).

*Tính bắc cầu : $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ và $\frac{c}{d} > \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{m}{n}$

II. Bài toán

Bài 1: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

a) $\frac{7}{9}$ và $\frac{19}{17}$

b) $\frac{311}{256}$ và $\frac{199}{203}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{7}{9} < 1 < \frac{19}{17} \Rightarrow \frac{7}{9} < \frac{19}{17}$

c) Ta có $\frac{311}{256} > 1 > \frac{199}{203} \Rightarrow \frac{311}{256} > \frac{199}{203}$

Bài 2: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

a) $\frac{-16}{19}$ và $\frac{15}{17}$

b) $\frac{419}{-723}$ và $\frac{-699}{-692}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{-16}{19} < 0 < \frac{15}{17} \Rightarrow \frac{-16}{19} < \frac{15}{17}$

b) Ta có $\frac{419}{-723} < 0 < \frac{-699}{-692} \Rightarrow \frac{419}{-723} < \frac{-699}{-692}$

Bài 3: So sánh hai phân số sau:

a) $\frac{-371}{459}$ và $\frac{-371}{-459}$

b) $\frac{-29}{73}$ và $\frac{-80}{49}$.

Lời giải:

a) $\frac{-371}{459} < 0 < \frac{-371}{-459} \Rightarrow \frac{-371}{459} < \frac{-371}{-459}$.

b) $\frac{-29}{73} > \frac{-73}{73} = -1. \quad (1)$

$\frac{-80}{49} < \frac{-49}{49} = -1. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{-29}{73} > \frac{-80}{49}$.

Bài 4: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

a) $\frac{18}{31}$ và $\frac{15}{37}$

b) $\frac{72}{73}$ và $\frac{58}{99}$

Lời giải:

a) Vì $\frac{18}{31} > \frac{18}{37}$ và $\frac{18}{37} > \frac{15}{37} \Rightarrow \frac{18}{31} > \frac{15}{37}$

b) Cách 1: Vì $\frac{72}{73} > \frac{72}{99}$ và $\frac{72}{99} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$

Cách 2: Vì $\frac{72}{73} > \frac{58}{73}$ và $\frac{58}{73} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$

Bài 5: So sánh các phân số sau:

a) $\frac{3}{121}$ và $\frac{6}{241}$; b) $\frac{31}{67}$ và $\frac{29}{73}$.

Lời giải:

a) Quy đồng tử số ta được: $\frac{3}{121} = \frac{6}{242}$.

Rõ ràng $\frac{6}{242} < \frac{6}{241}$ tức là $\frac{3}{121} < \frac{6}{241}$.

b) Chọn phân số trung gian là $\frac{31}{73}$ ta có:

$$\frac{31}{67} > \frac{31}{73} > \frac{29}{73} \text{ do đó } \frac{31}{67} > \frac{29}{73}.$$

Bài 6: So sánh: $\frac{n}{n+3}$ và $\frac{n+1}{n+2}$; ($n \in \mathbb{N}^*$).

Lời giải:

Ta có : $\frac{n}{n+3} < \frac{n}{n+2}$ và $\frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \frac{n}{n+3} < \frac{n+1}{n+2}$; ($n \in \mathbb{N}^*$)

Bài 7: So sánh hai phân số bằng cách dùng số xấp xỉ làm trung gian.

a) $\frac{12}{47}$ và $\frac{19}{77}$ b) $\frac{11}{32}$ và $\frac{16}{49}$ c) $\frac{12}{37}$ và $\frac{19}{54}$

Lời giải:

a) Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là $\frac{1}{4}$.

$$\text{Ta có : } \frac{12}{47} > \frac{12}{48} = \frac{1}{4} \text{ \& } \frac{19}{77} < \frac{19}{76} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{12}{47} > \frac{19}{77}.$$

b) Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là $\frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có : } \frac{11}{32} > \frac{11}{33} = \frac{1}{3} \text{ \& } \frac{16}{49} < \frac{16}{48} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{11}{32} > \frac{16}{49}.$$

c) Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là $\frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có : } \frac{12}{37} < \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \text{ \& } \frac{19}{54} > \frac{18}{54} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{12}{37} < \frac{19}{54}.$$

Bài 8: So sánh: $A = \frac{3535.232323}{353535.2323}$; $B = \frac{3535}{3534}$; $C = \frac{2323}{2322}$

Lời giải:

$$A = \frac{3535.232323}{353535.2323} = \frac{35.101.23.10101}{35.10101.23.101} = 1$$

$$B = \frac{3535}{3534} = 1 + \frac{1}{3534}$$

$$C = \frac{2323}{2322} = 1 + \frac{1}{2322}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{3534} < \frac{1}{2322} \text{ nên } A < B < C$$

Bài 9: So sánh: $A = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52}$ và $B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 540}$

Lời giải:

$$A = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52} = \frac{5.11.13(1.1 - 2.2)}{22.26(1.1 - 2.2)} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 540} = \frac{138(138 - 5)}{137(137 - 4)} = \frac{138}{137} = 1 + \frac{1}{137}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{4} > \frac{1}{137} \text{ nên } A > B$$

Bài 10: So sánh $A = \frac{2004^{2003} + 1}{2004^{2004} + 1}$ và $B = \frac{2004^{2002} + 1}{2004^{2003} + 1}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 2004A = \frac{2004^{2004} + 2004}{2004^{2004} + 1} = 1 + \frac{2003}{2004^{2004} + 1}$$

$$2004B = \frac{2004^{2003} + 2004}{2004^{2003} + 1} = 1 + \frac{2003}{2004^{2003} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{2003}{2004^{2004} + 1} < \frac{2003}{2004^{2003} + 1} \Rightarrow 1 + \frac{2003}{2004^{2004} + 1} < 1 + \frac{2003}{2004^{2003} + 1}$$

$$\Rightarrow 2004A < 2004B$$

$$\Rightarrow A < B$$

Vậy $A < B$.

Dạng 7: So sánh hai phân số bằng cách dùng tính chất phân số.

I. Phương pháp giải

1. Tính chất 1: Với $m \neq 0$ ta có :

$$*\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$$

$$*\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+m}{b+m}.$$

$$*\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$$

$$*\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

2. Tính chất 2: Với các số nguyên dương a, b, c, d :

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

II. Bài toán

Bài 1: Tìm 3 phân số mà: lớn hơn $-\frac{1}{3}$ và nhỏ hơn $-\frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Vì } -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} \text{ nên } -\frac{1}{3} < \frac{-1-1}{3+4} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{2}{7} < -\frac{1}{4}$$

$$\text{Vì } -\frac{1}{3} < -\frac{2}{7} < -\frac{1}{4} \text{ nên } -\frac{1}{3} < \frac{-1+(-2)}{3+7} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{3}{10} < -\frac{1}{4}$$

$$\text{Vì } -\frac{1}{3} < -\frac{3}{10} < -\frac{1}{4} \text{ nên } -\frac{1}{3} < \frac{-1+(-3)}{3+10} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{4}{13} < -\frac{1}{4}$$

Ta có ba phân số cần tìm là: $-\frac{2}{7}, -\frac{3}{10}, -\frac{4}{13}$.

Bài 2: Tìm ba phân số khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{4}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

Lời giải:

$$\text{Từ } \frac{1}{4} < \frac{1}{3} \text{ suy ra } \frac{1}{4} < \frac{1+1}{4+3} < \frac{1}{3} \text{ hay } \frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Từ } \frac{1}{4} < \frac{2}{7} \text{ suy ra } \frac{1}{4} < \frac{1+2}{4+7} < \frac{2}{7} \text{ hay } \frac{1}{4} < \frac{3}{11} < \frac{2}{7}.$$

$$\text{Từ } \frac{2}{7} < \frac{1}{3} \text{ suy ra } \frac{2}{7} < \frac{2+1}{7+3} < \frac{1}{3} \text{ hay } \frac{2}{7} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy, ta có } \frac{1}{4} < \frac{3}{11} < \frac{2}{7} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}.$$

Bài 3: So sánh $\frac{-387}{386}$ và $\frac{-592}{591}$

Lời giải:

$$\frac{387}{386} > 1 \Rightarrow \frac{387}{386} > \frac{387+205}{386+205} = \frac{592}{591}$$

$$\text{Ta có: } \frac{387}{386} > \frac{592}{591} \text{ nên } \frac{-387}{386} < \frac{-592}{591}.$$

Bài 4: So sánh hai phân số sau: $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$ và $B = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$

Lời giải:

$$\text{Ta có : } A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1} < 1 \text{ (vì tử nhỏ hơn mẫu)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1} < \frac{(10^{11}-1)+11}{(10^{12}-1)+11} = \frac{10^{11}+10}{10^{12}+10} = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} = B$$

$$\text{Vậy } A < B.$$

Bài 5: So sánh hai phân số sau: $A = \frac{17^{18}+1}{17^{19}+1}$; $B = \frac{17^{17}+1}{17^{18}+1}$

Lời giải:

$$\text{Vì } \frac{17^{18}+1}{17^{19}+1} < 1 \text{ (vì tử nhỏ hơn mẫu)}$$

$$\text{nên } A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17^{18} + 17}{17^{19} + 17} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 6: So sánh hai phân số sau: $A = \frac{98^{89} + 1}{98^{99} + 1}$ và $B = \frac{98^{88} + 1}{98^{98} + 1}$.

Lời giải:

Ta thấy $A = \frac{98^{89} + 1}{98^{99} + 1} < 1$ (vì tử nhỏ hơn mẫu) nên:

$$A = \frac{98^{89} + 1}{98^{99} + 1} < \frac{98^{89} + 1 + 97}{98^{99} + 1 + 97} = \frac{98^{89} + 98}{98^{99} + 98} = \frac{98 \cdot (98^{88} + 1)}{98 \cdot (98^{98} + 1)} = \frac{98^{88} + 1}{98^{98} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 7: So sánh hai phân số sau: $C = \frac{15^{16} + 1}{15^{17} + 1}$ và $D = \frac{15^{15} + 1}{15^{16} + 1}$.

Lời giải:

Ta thấy $C = \frac{15^{16} + 1}{15^{17} + 1} < 1$ (vì tử nhỏ hơn mẫu) nên:

$$C = \frac{15^{16} + 1}{15^{17} + 1} < \frac{15^{16} + 1 + 14}{15^{17} + 1 + 14} = \frac{15^{16} + 15}{15^{17} + 15} = \frac{15 \cdot (15^{15} + 1)}{15 \cdot (15^{16} + 1)} = \frac{15^{15} + 1}{15^{16} + 1} = D$$

Vậy $C < D$.

Bài 8: So sánh hai phân số sau: $M = \frac{2004}{2005} + \frac{2005}{2006}$ và $N = \frac{2004 + 2005}{2005 + 2006}$

Lời giải:

Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2004}{2005} > \frac{2004}{2005+2006} \\ \frac{2005}{2006} > \frac{2005}{2005+2006} \end{array} \right\} \text{ Cộng theo vế ta có kết quả } M > N.$$

Bài 9: So sánh hai phân số sau: $\frac{37}{39}$ và $\frac{3737}{3939}$?

Lời giải:

$$\frac{37}{39} = \frac{3700}{3900} = \frac{3700+37}{3900+39} = \frac{3737}{3939} \text{ (áp dụng } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \text{.)}$$

Vậy $\frac{37}{39} = \frac{3737}{3939}$.

Bài 10: So sánh hai phân số : $A = \frac{100^{100}+1}{100^{90}+1}$ và $B = \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$.

Lời giải:

$$\text{Vì } A = \frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} > 1 \quad \text{nên} \quad \frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} > \frac{(100^{100}+1)+99}{(100^{90}+1)+99}$$

$$\Rightarrow \frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} > \frac{100^{100}+100}{100^{90}+100} \Rightarrow \frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} > \frac{100(100^{99}+1)}{100(100^{89}+1)} = B$$

Vậy $A > B$.

Bài 11: So sánh hai phân số: $A = \frac{2003^{2003}+1}{2003^{2004}+1}$ và $B = \frac{2003^{2002}+1}{2003^{2003}+1}$

Lời giải:

Dễ thấy $A < 1$ nên:

$$A = \frac{2003^{2003}+1}{2003^{2004}+1} < \frac{2003^{2003}+1+2002}{2003^{2004}+1+2002}$$

$$= \frac{2003^{2003}+2003}{2003^{2004}+2003} = \frac{2003 \cdot (2003^{2002}+1)}{2003(2003^{2003}+1)}$$

$$= \frac{2003^{2002}+1}{2003^{2003}+1} = B$$

Vậy $A < B$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG. (Khoảng 15 bài)

Bài 1. So sánh P và Q biết $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Lời giải:

Ta có:

$$Q = \frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013} = \frac{2010}{2011+2012+2013} + \frac{2011}{2011+2012+2013} + \frac{2012}{2011+2012+2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là: 2010; 2011; 2012 thấy được các phân số của P đều lớn hơn các phân số của Q .

Vậy $P > Q$

Bài 2: So sánh không qua quy đồng: $A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}; B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Lời giải:

Ta có

$$A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{Ta thấy } \frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}} \Rightarrow A > B$$

Bài 3: Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}}; B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}}$$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}} = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-10}{10^{2011}} + \frac{-9}{10^{2011}}$$

$$B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}} = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-10}{10^{2010}} + \frac{-9}{10^{2010}}$$

Ta thấy $\frac{-10}{10^{2011}} > \frac{-10}{10^{2010}} \Rightarrow A > B$

Bài 4: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

So sánh A với $\frac{3}{4}$?

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$A = \frac{1}{\frac{(1+3).2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+5).3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+7).4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{(1+2017).1009}{2}}$$

$$= \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1009.2018} = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1009.1009}$$

$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right) \Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}.$$

Bài 5: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013.2014-1}{2013.2014}$ và $B = \frac{2014.2015-1}{2014.2015}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{2013.2014-1}{2013.2014} = 1 - \frac{1}{2013.2014}$$

$$B = \frac{2014.2015-1}{2014.2015} = 1 - \frac{1}{2014.2015}$$

Vì $\frac{1}{2013.2014} > \frac{1}{2014.2015}$ nên $A < B$.

Bài 6: Cho: $A = \frac{10^{2001} + 1}{10^{2002} + 1}$; $B = \frac{10^{2002} + 1}{10^{2003} + 1}$. Hãy so sánh A và B .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 10A = \frac{10^{2002} + 10}{10^{2002} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2002} + 1} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } 10B = \frac{10^{2003} + 10}{10^{2003} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2003} + 1} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta thấy: } \frac{9}{10^{2002} + 1} > \frac{9}{10^{2003} + 1} \Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B.$$

Bài 7: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$.

Lời giải:

$$\text{Xét: } N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{Và } M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$$

Vậy $N > M$

Bài 8: So sánh: $N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}}$ và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$.

Lời giải:

$$N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2006}} + \frac{5}{10^{2006}}$$

$$\text{Và } M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{6}{10^{2006}} < \frac{6}{10^{2005}}$$

Vậy $N < M$.

Bài 9: So sánh A và B biết:

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}, \quad B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

Lời giải:

$$\text{Vì } A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1 \Rightarrow A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$$

Bài 10: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải:

Ta thấy: $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } & \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \\ &= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} \right) \\ &= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) Suy ra:

$$\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$$

Bài 11: Không quy đồng mẫu hãy so sánh hai phân số sau: $\frac{37}{67}$ và $\frac{377}{677}$.

Lời giải:

$$\frac{300}{670} > \frac{300}{677} \text{ mà } \frac{300}{670} = \frac{30}{67} \Rightarrow \frac{30}{67} > \frac{300}{677} \quad (1)$$

$$\text{Ta có : } 1 - \frac{37}{67} = \frac{30}{67} \text{ và } 1 - \frac{377}{677} = \frac{300}{677} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{377}{677} > \frac{37}{67}.$$

Bài 12: So sánh: $A = \frac{2005^{2005} + 1}{2005^{2006} + 1}$ và $B = \frac{2005^{2004} + 1}{2005^{2005} + 1}$.

Lời giải:

$$A = \frac{2005^{2005} + 1}{2005^{2006} + 1} < \frac{2005^{2005} + 1 + 2004}{2005^{2006} + 1 + 2004} = \frac{2005(2005^{2004} + 1)}{2005(2005^{2005} + 1)} = \frac{2005^{2004} + 1}{2005^{2005} + 1} = B.$$

Vậy $A < B$.

Bài 13: So sánh: $A = \frac{2006^{2006} + 1}{2007^{2007} + 1}$ và $B = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1}$.

Lời giải:

Ta có nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$A = \frac{2006^{2006} + 1}{2006^{2007} + 1} < \frac{2006^{2006} + 1 + 2005}{2006^{2007} + 2005 + 1} = \frac{2006^{2006} + 2006}{2006^{2007} + 2006} = \frac{2006(2006^{2005} + 1)}{2006(2006^{2006} + 1)} = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 14: So sánh các biểu thức: $A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717}$ với $B = \frac{10}{17}$.

Lời giải:

$$A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717} = \frac{121212:10101}{171717:10101} + \frac{2}{17} - \frac{404:101}{1717:101}$$

$$\Rightarrow A = \frac{12}{17} + \frac{2}{17} - \frac{4}{17} = \frac{12+2-4}{17}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{10}{17} \text{ hay } A = B = \frac{10}{17}$$

Bài 15: Cho: $A = \frac{10^{2020} + 1}{10^{2021} + 1}$; $B = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}$. Hãy so sánh A và B .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 10A = \frac{10^{2021} + 10}{10^{2021} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2021} + 1} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } 10B = \frac{10^{2022} + 10}{10^{2022} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2022} + 1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy : $\frac{9}{10^{2021}+1} > \frac{9}{10^{2022}+1} \Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B$.

Bài 16: a) So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

b) So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. ($n \in \mathbb{N}^*$)

Lời giải:

a) So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

$$\frac{15}{301} < \frac{15}{300} = \frac{1}{20} = \frac{25}{500} < \frac{25}{499}. \text{ Vậy } \frac{15}{301} < \frac{25}{499}$$

b) So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Ta có : } \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n-1}} - \frac{n+2}{2^n}$$

$$VP = \frac{n+1}{2^{n-1}} - \frac{n+2}{2^n} = \frac{2(n+1)}{2^n} - \frac{n+2}{2^n} = \frac{2n+2-n-2}{2^n} = \frac{n}{2^n} = VT \text{ (đpcm)}$$

Với $\forall n \geq 2$ ta có: $\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n-1}} - \frac{n+2}{2^n}$. Từ đó ta có:

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^2}\right) + \left(\frac{4}{2^2} - \frac{5}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{2008}{2^{2006}} - \frac{2009}{2^{2007}}\right) = 2 - \frac{2009}{2^{2007}} < 2. \text{ Vậy } S < 2$$

Bài 17: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29}$ và $8b - 9a = 31$

Lời giải:

$$8b - 9a = 31 \Rightarrow b = \frac{31+9a}{8} = \frac{32-1+8a+a}{8} \in \mathbb{N} \Rightarrow (a-1):8 \Rightarrow a = 8q+1 (q \in \mathbb{N})$$

$$b = \frac{31+9(8q+1)}{8} = 9q+5 \Rightarrow \frac{11}{17} < \frac{8q+1}{9q+5} < \frac{23}{29}$$

$$11(9q+5) < 17(8q+1) \Rightarrow 37q > 38 \Rightarrow q > 1$$

$$29(8q+1) < 23(9q+5) \Rightarrow 25q < 86 \Rightarrow q < 4 \Rightarrow q \in \{2; 3\}$$

$$q = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{23}{17}; q = 3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{32}{25}.$$

Bài 18: So sánh: $M = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{2000} + 1}$ và $N = \frac{1999^{1989} + 1}{1999^{2009} + 1}$.

(Đề thi HSG 6 trường THCS Lê Ngọc Hân năm học 1997-1998)

Lời giải:

Ta có : $1999^{1999} + 1 > 1999^{1989} + 1$

$$1999^{2000} + 1 < 1999^{2009} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{2000} + 1} > \frac{1999^{1989} + 1}{1999^{2009} + 1}$$

Vậy $M > N$.

Bài 19: Hãy so sánh hai phân số sau bằng tất cả các cách có thể được:

a) $\frac{1999}{2000}; \frac{19992000}{20002000}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > 2$

(Đề thi HSG 6 _ Quận Hai bà Trưng 1999 - 2000)

Lời giải:

a) Cách 1 : Quy đồng mẫu số rồi so sánh tử.

Cách 2: $\frac{1999}{2000} = \frac{19991999}{20002000} < \frac{19992000}{20002000}$

Cách 3: Ta có: $\frac{1999}{2000} + \frac{1}{2000} = \frac{19992000}{20002000} + \frac{10000}{20002000} = 1$

mà $\frac{1}{2000} = \frac{10000}{20000000} > \frac{10000}{20002000} \Rightarrow \frac{1999}{2000} < \frac{19992000}{20002000}$

b) $\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{4n-1}{4n^2-2n} > \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2$$

Bài 20: Thực hiện so sánh:

a) $A = \frac{2009^{2008} + 1}{2009^{2009} + 1}$ với $B = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1}$

b) $C = 1.3.5.7.....99$ với $D = \frac{51}{2} \cdot \frac{52}{2} \cdot \frac{53}{2} \cdot \dots \cdot \frac{100}{2}$.

(HSG 2013 – 2014)

Lời giải:

a) Thực hiện qui đồng mẫu số:

$$A = \frac{(2009^{2008} + 1)(2009^{2010} + 1)}{(2009^{2009} + 1)(2009^{2010} + 1)} = \frac{2009^{4018} + 2009^{2010} + 2009^{2008} + 1}{(2009^{2009} + 1)(2009^{2010} + 1)}$$

$$B = \frac{(2009^{2009} + 1)(2009^{2009} + 1)}{(2009^{2010} + 1)(2009^{2009} + 1)} = \frac{2009^{4018} + 2009^{2009} + 2009^{2009} + 1}{(2009^{2010} + 1)(2009^{2009} + 1)}$$

$$\text{Vì } 2009^{2010} + 2009^{2008} = 2008(2009^2 + 1)$$

$$2009^{2009} + 2009^{2009} = 2009^{2008}(2009 + 2009)$$

Do $2009^2 + 1 > 2009 + 2009$ nên $A > B$.

(Có thể chứng tỏ $A - B > 0$ để kết luận $A > B$).

Cách khác: Có thể so sánh $2009A$ với $2009B$ trước.

$$\begin{aligned} \text{b) } C &= 1.3.5.7.....99 = \frac{1.3.5.7.....99.2.4.6.....100}{2.4.6.....100} = \frac{1.3.5.7.....99.2.4.6.....100}{(1.2)(2.2)(3.2)(4.2).....(50.2)} \\ &= \frac{1.2.3.....50.51.52.53.....100}{1.2.3.....50.\underbrace{2.2.2.....2}_{50 \text{ cs } 2}} = \frac{51}{2} \cdot \frac{52}{2} \cdot \frac{53}{2} \cdot \frac{100}{2} = D \end{aligned}$$

Vậy $C = D$.

$$\text{Bài 21: So sánh: } \frac{2013^{2012} + 1}{2013^{2013} + 1} \text{ với } B = \frac{2013^{2013} + 1}{2013^{2014} + 1}.$$

(HSG THANH OAI 2013 – 2014)

Lời giải:

$$A = \frac{(2013^{2012} + 1)(2013^{2014} + 1)}{(2013^{2013} + 1)(2013^{2014} + 1)} = \frac{2013^{4026} + 2013^{2012} + 2013^{2014} + 1}{(2013^{2013} + 1)(2013^{2014} + 1)}$$

$$B = \frac{(2013^{2013} + 1)(2013^{2013} + 1)}{(2013^{2014} + 1)(2013^{2013} + 1)} = \frac{2013^{4026} + 2013^{2013} + 2013^{2013} + 1}{(2013^{2014} + 1)(2013^{2013} + 1)}$$

$$2013^{2014} + 2013^{2012} = 2013^{2012}(2013^2 + 1)$$

$$2013^{2013} + 2013^{2013} = 2013^{2012}(2013 + 2013)$$

Do $2013^2 + 1 > 2013 + 2013$ nên $A > B$.

(Có thể chứng tỏ $A - B > 0$ để kết luận $A > B$).

Cách khác: Có thể so sánh $2013A$ với $2013B$ trước.

Bài 22: So sánh $A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}}$ với $B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}}$

Lời giải:

Thực hiện qui đồng mẫu số:

$$A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

$$B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

Ta có: $37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39} = 2012^{38} (37^{2012} \cdot 2012 + 2012)$

$$37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38} = 2012^{38} \cdot (37^{2012} + 2)$$

mà $37^{2012} \cdot 2012 + 2012 > 37^{2012} + 2$. Từ đó suy ra $A > B$.

Bài 23: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$

(Đề thi HSG 6 Kinh Môn 2017 - 2018)

Lời giải:

Ta có: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1} \Rightarrow 2018E = \frac{2018^{100} - 2018}{2018^{100} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot E = 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1}$

$$F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot F = \frac{2018^{99} - 2018}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot F = 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$$

Vì $\frac{2017}{2018^{100} - 1} < \frac{2017}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1} > 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$

Hay $2018E > 2018F \Rightarrow E > F$

Vậy $E > F$.

Bài 24: So sánh các phân số sau: $\frac{23}{99}; \frac{23232323}{99999999}; \frac{2323}{9999}; \frac{232323}{999999}$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{23}{99} = \frac{23.101}{99.101} = \frac{2323}{9999}$$

$$\frac{23}{99} = \frac{23.10101}{99.10101} = \frac{232323}{999999}$$

$$\frac{23}{99} = \frac{23.1010101}{99.1010101} = \frac{23232323}{99999999}$$

$$\Rightarrow \frac{23}{99} = \frac{2323}{9999} = \frac{232323}{999999} = \frac{23232323}{99999999}$$

Bài 25: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013.2014-1}{2013.2014}$ và $B = \frac{2014.2015-1}{2014.2015}$

(Đề thi HSG 6 huyện Bạch Thông 2018-2019)

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{2013.2014-1}{2013.2014} = 1 - \frac{1}{2013.2014}$$

$$B = \frac{2014.2015-1}{2014.2015} = 1 - \frac{1}{2014.2015}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2013.2014} > \frac{1}{2014.2015} \text{ nên } A < B$$

Bài 26: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

(Đề thi HSG 6 huyện Lý Nhân 2018-2019)

Lời giải:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2011}\right) + \left(1 - \frac{1}{2012}\right) + \left(1 + \frac{2}{2010}\right)$$

$$A = 3 + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}\right) + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2012}\right)$$

$$\Rightarrow A > 3$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{17}\right)$$

$$B < \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{5}.5 + \frac{1}{8}.8 \Rightarrow B < 3$$

Từ đó suy ra $A > B$.

Bài 27: Cho 2 phân số $\frac{1}{7} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}$

Tìm 10 phân số có dạng $\frac{a}{b}$ sao cho $\frac{1}{7} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}$

Có thể tìm được bao nhiêu phân số $\frac{a}{b}$ thỏa mãn điều kiện trên ?

(Đề HSG Toán 6_Đặng Chánh Kỷ_2018-2019)

Lời giải:

a) $\frac{3}{21} < \frac{a}{b} < \frac{14}{21} \Rightarrow 10$ phân số $\frac{a}{b}$ thỏa mãn là: $\frac{4}{21}; \frac{5}{21}; \dots; \frac{13}{21}$

b) Có vô số phân số thỏa mãn điều kiện trên vì các phân số cần tìm phụ thuộc vào mẫu chung. Nếu mẫu chung càng lớn thì phân số càng nhiều

Bài 28: Cho biết $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{130}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

(Đề HSG Toán 6 huyện Thanh Oai 2013-2014)

Lời giải:

+) Chứng minh $S < \frac{91}{330}$

$$S = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{111} + \dots + \frac{1}{120} \right) + \left(\frac{1}{121} + \dots + \frac{1}{130} \right)$$

$$S < \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120} \right)$$

$$S < \frac{1}{100} \cdot 10 + \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$$

$$S < \frac{66 + 60 + 55}{660}$$

$$S < \frac{181}{660} < \frac{182}{660} \text{ hay } S < \frac{91}{330} \quad (1)$$

+) Chứng minh $\frac{1}{4} < S$

$$S > \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120} \right) + \left(\frac{1}{130} + \dots + \frac{1}{130} \right)$$

$$S > \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 + \frac{1}{130} \cdot 10 = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$$

$$S > \frac{156 + 143 + 132}{1716}$$

$$S > \frac{431}{1716} > \frac{429}{1716} \text{ Hay } S > \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}.$$

∞ HẾT ∞

CHUYÊN ĐỀ PHÂN SỐ**CHỦ ĐỀ 4: TÌM PHÂN SỐ X****PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

*** Hai phân số bằng nhau**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c \text{ (với } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0, d \neq 0)$$

***Các phép toán về phân số**

a. Cộng, trừ phân số cùng mẫu:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m} (m \neq 0)$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m} (m \neq 0, a \geq b)$$

b. Cộng, trừ phân số không cùng mẫu:

- Quy đồng mẫu các phân số

- Cộng các tử của các phân số đã được quy đồng và giữ nguyên mẫu chung.

c. Nhân các phân số: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} (b, d \neq 0)$

d. Chia 2 phân số: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c} (b, c, d \neq 0)$

***Tính chất cơ bản của phép cộng và nhân phân số:**

a. Tính chất giao hoán:

- Phép cộng: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} (b, d \neq 0)$

- Phép nhân: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} (b, d \neq 0)$

b. Tính chất kết hợp :

- Phép cộng : $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) + \frac{m}{n} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{m}{n} \right) (b, d, n \neq 0)$

- Phép nhân: $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} \right) (b, d, n \neq 0)$

c. Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng (trừ):

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} + \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} \quad (b, d, n \neq 0)$$

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} - \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1. Tìm x sử dụng tính chất hai phân số bằng nhau.

I. Phương pháp giải.

- Sử dụng tính chất của hai phân số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0, d \neq 0$) để tìm x

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm x biết :

a) $\frac{x}{18} = \frac{-5}{6}$

b) $\frac{-35}{x} = \frac{7}{3}$

Lời giải

a) $\frac{x}{18} = \frac{-5}{6} \Rightarrow x.6 = 18.(-5)$

$$x.6 = -90$$

$$x = -90 : 6$$

$$x = -15$$

$$\text{Vậy } x = -15$$

b) $\frac{-35}{x} = \frac{7}{3} \Rightarrow -35.3 = 7x$

$$-105 = 7x$$

$$x = -105 : 7$$

$$x = -15$$

$$\text{Vậy } x = -15$$

Bài 2. Tìm x biết :

a) $\frac{x-1}{3} = \frac{-2}{5}$

b) $\frac{x+5}{4} = \frac{x-3}{5}$

Lời giải

$$a) \frac{x-1}{3} = \frac{-2}{5} \Rightarrow (x-1)5 = 3 \cdot (-2)$$

$$(x-1)5 = -6$$

$$5x - 5 = -6$$

$$5x = -1$$

$$x = \frac{-1}{5}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-1}{5}$$

$$b) \frac{x+5}{4} = \frac{x-3}{5} \Rightarrow (x+5)5 = 4(x-3)$$

$$5x + 25 = 4x - 12$$

$$5x - 4x = -12 - 25$$

$$x = -37$$

$$\text{Vậy } x = -37$$

Bài 3. Tìm x biết :

$$a) \frac{23+x}{40+x} = \frac{3}{4}$$

$$b) \frac{x+10}{27} = \frac{x}{9}$$

Lời giải

$$a) \frac{23+x}{40+x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(23+x) = 3(40+x)$$

$$92 + 4x = 120 + 3x$$

$$4x - 3x = 120 - 92$$

$$x = 28$$

$$\text{Vậy } x = 28$$

$$b) \frac{x+10}{27} = \frac{x}{9} \Rightarrow 9(x+10) = 27x$$

$$9x + 90 = 27x$$

$$9x - 27x = -90$$

$$-18x = -90$$

$$x = (-90) : (-18) = 5$$

Vậy $x = 5$

Bài 4. Tìm x biết :

$$\text{a) } \frac{-7}{x} = \frac{-21}{x-34}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} = \frac{x+1}{3x}$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{-7}{x} = \frac{-21}{x-34} \Rightarrow -7(x-34) = -21x$$

$$-7x + 238 = -21x$$

$$-7x + 21x = -238$$

$$14x = -238$$

$$x = -238 : 14 = -17$$

Vậy $x = -17$

$$\text{b) } \frac{1}{2} = \frac{x+1}{3x} \Rightarrow 3x = 2(x+1)$$

$$3x = 2x + 2$$

$$3x - 2x = 2$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$

Bài 5. Tìm x biết :

$$\text{a) } \frac{x}{3} = \frac{27}{x}$$

$$\text{b) } \frac{-4}{x} = \frac{x}{-9}$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{x}{3} = \frac{27}{x} \Rightarrow x.x = 3.27$$

$$x^2 = 81$$

$$x^2 = 9^2$$

$$\Rightarrow x = 9 \text{ hoặc } x = -9$$

Vậy $x = 9$ hoặc $x = -9$

$$\text{b) } \frac{-4}{x} = \frac{x}{-9} \Rightarrow (-4).(-9) = x.x$$

$$x^2 = 36$$

$$x^2 = 6^2$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ hoặc } x = -6$$

$$\text{Vậy } x = 6 \text{ hoặc } x = -6$$

Bài 6. Tìm x biết :

$$\text{a) } \frac{x-1}{2} = \frac{8}{x-1}$$

$$\text{b) } \frac{-3}{x-2} = \frac{x-2}{-27}$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{x-1}{2} = \frac{8}{x-1} \Rightarrow (x-1)(x-1) = 2.8$$

$$(x-1)^2 = 16$$

$$(x-1)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow x-1 = 4 \text{ hoặc } x-1 = -4$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = -3$$

$$\text{Vậy } x = 5 \text{ hoặc } x = -3$$

$$\text{b) } \frac{-3}{x-2} = \frac{x-2}{-27} \Rightarrow (-3).(-27) = (x-2)^2$$

$$(x-2)^2 = 81$$

$$(x-2)^2 = 9^2$$

$$\Rightarrow x-2 = 9 \text{ hoặc } x-2 = -9$$

$$\Rightarrow x = 11 \text{ hoặc } x = -7$$

$$\text{Vậy } x = 11 \text{ hoặc } x = -7$$

Bài 6. Tìm x biết :

$$\text{a) } \frac{-5}{4-x} = \frac{4-x}{-5}$$

$$\text{b) } \frac{-7}{x-3} = \frac{3-x}{7}$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{-5}{4-x} = \frac{4-x}{-5} \Rightarrow (-5).(-5) = (4-x)^2$$

$$(4-x)^2 = 25$$

$$(4-x)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow 4-x = 5 \text{ hoặc } 4-x = -5$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 9$$

$$\text{Vậy } x = -1 \text{ hoặc } x = 9$$

$$\text{b) } \frac{-7}{x-3} = \frac{3-x}{7} \Rightarrow -7.7 = (x-3)(3-x)$$

$$(x-3)^2 = 49$$

$$(x-3)^2 = 7^2$$

$$\Rightarrow x-3 = 7 \text{ hoặc } x-3 = -7$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ hoặc } x = -4$$

$$\text{Vậy } x = 10 \text{ hoặc } x = -4$$

Bài 7. Tìm x, y biết :

$$\text{a) } \frac{4}{x} = \frac{y}{21} = \frac{28}{49}$$

$$\text{b) } \frac{2}{x} = \frac{y}{15} = \frac{-25}{75}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \frac{4}{x} = \frac{28}{49} \Rightarrow 4.49 = x.28$$

$$28x = 196$$

$$x = 196 : 28 = 7$$

$$\frac{y}{21} = \frac{28}{49} \Rightarrow 49y = 21.28$$

$$49y = 588$$

$$y = 588 : 49 = 12$$

$$\text{Vậy } x = 7 \text{ và } y = 12$$

$$\text{b) Ta có } \frac{2}{x} = \frac{-25}{75} \Rightarrow 2.75 = -25x$$

$$150 = -25x$$

$$x = 150 : (-25) = -6$$

$$\frac{y}{15} = \frac{-25}{75} \Rightarrow 75y = -25.15$$

$$75y = -375$$

$$y = -375 : 75 = -5$$

Vậy $x = -6$ và $y = -5$

Bài 8. Tìm x, y biết :

$$a) \frac{-5}{x} = \frac{y}{16} = \frac{-18}{72}$$

$$b) \frac{2}{x} = \frac{y}{21} = \frac{-10}{15}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \frac{-5}{x} = \frac{-18}{72} \Rightarrow -5.72 = -18x$$

$$-360 = -18x$$

$$x = -360 : (-18) = 2$$

$$\frac{y}{16} = \frac{-18}{72} \Rightarrow 72y = -18.16$$

$$72y = -288$$

$$y = -288 : 72 = -4$$

Vậy $x = 2$ và $y = -4$

$$\text{Bài 9. Tìm } x, y \text{ biết : } \frac{-3}{x-1} = \frac{y-2}{8} = \frac{-12}{16}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{-3}{x-1} = \frac{-12}{16} \Rightarrow -3.16 = -12(x-1)$$

$$-48 = -12(x-1)$$

$$x-1 = -48 : (-12)$$

$$x-1 = 4$$

$$x = 4 + 1 = 5$$

$$\frac{y-2}{8} = \frac{-12}{16} \Rightarrow (y-2)16 = -12.8$$

$$(y-2)16 = -96$$

$$y-2 = -96 : 16$$

$$y-2 = -6$$

$$y = -6 + 2 = -4$$

Vậy $x = 5$ và $y = -4$

Bài 10. Tìm x, y biết : $\frac{x+2}{7} = \frac{y-1}{14} = \frac{-15}{35}$

Lời giải

Ta có

$$\frac{x+2}{7} = \frac{-15}{35} \Rightarrow (x+2)35 = -15.7$$

$$(x+2)35 = -105$$

$$x+2 = -105 : 35$$

$$x+2 = -3$$

$$x = -3 - 2 = -5$$

$$\frac{y-1}{14} = \frac{-15}{35} \Rightarrow 35(y-1) = 14.(-15)$$

$$35(y-1) = -210$$

$$y-1 = -210 : 35$$

$$y-1 = -6$$

$$y = -6 + 1 = -5$$

Vậy $x = -5$ và $y = -5$

Dạng 2. Tìm x trong các phép toán thông thường.

I. Phương pháp giải.

* Xác định quan hệ giữa các số trong phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia:

- Trong phép cộng: Muốn tìm một số hạng ta lấy tổng trừ đi số hạng kia.
- Trong phép trừ : Muốn tìm số bị trừ ta lấy số trừ cộng hiệu.

Muốn tìm số trừ ta lấy số bị trừ trừ đi hiệu.

- Trong phép nhân: Muốn tìm một thừa số ta lấy tích chia cho thừa số kia.

- Trong phép chia: Muốn tìm số bị chia ta lấy số chia nhân với thương.

Muốn tìm số chia ta lấy số bị chia chia cho thương.

* Nếu đề bài tìm x có nhiều dấu ngoặc thì ưu tiên tìm phần trong ngoặc theo thứ tự : $\{ \} \rightarrow [] \rightarrow ()$

Sau nhiều lần tìm phần ưu tiên bài toán đưa về dạng cơ bản.

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm x biết :

a) $\frac{3}{8} - \frac{1}{6}x = \frac{1}{4}$

b) $x : \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-2}{3}$

Lời giải

a) $\frac{3}{8} - \frac{1}{6}x = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{6}x = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{6}x = \frac{3}{8} - \frac{2}{8}$$

$$\frac{1}{6}x = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{1}{8} : \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$$

Vậy $x = \frac{3}{4}$

b) $x : \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-2}{3}$

$$x : \frac{3}{4} = \frac{-2}{3} - \frac{1}{4}$$

$$x : \frac{3}{4} = \frac{-8}{12} - \frac{3}{12}$$

$$x : \frac{3}{4} = \frac{-11}{12}$$

$$x = \frac{-11}{12} \cdot \frac{4}{3} = \frac{-11}{9}$$

Vậy $x = \frac{-11}{9}$

Bài 2. Tìm x biết :

a) $x - \frac{3}{7} : \frac{9}{14} = \frac{-7}{3}$

b) $\frac{9}{13}x = \frac{11}{8} - \frac{125}{1000}$

Lời giải

a) $x - \frac{3}{7} : \frac{9}{14} = \frac{-7}{3}$

b) $\frac{9}{13}x = \frac{11}{8} - \frac{125}{1000}$

$$x - \frac{2}{3} = \frac{-7}{3}$$

$$x = \frac{-7}{3} + \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{-5}{3}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-5}{3}$$

$$\frac{9}{13}x = \frac{11}{8} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{9}{13}x = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} : \frac{9}{13}$$

$$x = \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{9}$$

$$x = \frac{65}{36}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{65}{36}$$

Bài 3. Tìm x biết :

$$\text{a) } \left(x - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{11} = \frac{11}{4}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{3} - 2x\right) \cdot \frac{2}{5} = \frac{-8}{25}$$

Lời giải

$$\text{a) } \left(x - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{11} = \frac{11}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{11}{4} \cdot \frac{3}{11}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{4}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{3} - 2x\right) \cdot \frac{2}{5} = \frac{-8}{25}$$

$$\frac{1}{3} - 2x = \frac{-8}{25} : \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{3} - 2x = \frac{-4}{5}$$

$$2x = \frac{1}{3} + \frac{4}{5}$$

$$2x = \frac{17}{15}$$

$$x = \frac{17}{15} : 2$$

$$x = \frac{17}{30}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{17}{30}$$

Bài 4. Tìm x biết :

$$\text{a) } \frac{1}{3} : x - \frac{20}{100} = \frac{16}{-32}$$

$$\text{b) } \left(\frac{9}{2} - 2x \right) \cdot \frac{11}{7} = \frac{-11}{14}$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{1}{3} : x - \frac{20}{100} = \frac{16}{-32}$$

$$\text{b) } \left(\frac{9}{2} - 2x \right) \cdot \frac{11}{7} = \frac{-11}{14}$$

$$\frac{1}{3} : x - \frac{1}{5} = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{9}{2} - 2x = \frac{-11}{14} : \frac{11}{7}$$

$$\frac{1}{3} : x = \frac{-1}{2} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{9}{2} - 2x = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{1}{3} : x = \frac{-3}{10}$$

$$2x = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{3} : \frac{-3}{10} = \frac{-10}{9}$$

$$2x = 5$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-10}{9}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{2}$$

Bài 5. Tìm x biết :

$$\text{a) } \left(\frac{-3}{5}x - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} - (-1) = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \frac{9}{12} - \left(\frac{-1}{3}x - \frac{17}{12} \right) = \frac{(-2)^2}{9}$$

Lời giải

$$\text{a) } \left(\frac{-3}{5}x - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} - (-1) = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \frac{9}{12} - \left(\frac{-1}{3}x - \frac{17}{12} \right) = \frac{(-2)^2}{9}$$

$$\left(\frac{-3}{5}x - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + (-1)$$

$$\frac{3}{4} - \left(\frac{-1}{3}x - \frac{17}{12} \right) = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{-3}{5}x - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{-2}{3}$$

$$\frac{-1}{3}x - \frac{17}{12} = \frac{3}{4} - \frac{4}{9}$$

$$\frac{-3}{5}x - \frac{1}{2} = \frac{-2}{3} : \frac{3}{4}$$

$$\frac{-3}{5}x - \frac{1}{2} = \frac{-8}{9}$$

$$\frac{-3}{5}x = \frac{-8}{9} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{-3}{5}x = \frac{-16}{18} + \frac{9}{18}$$

$$\frac{-3}{5}x = \frac{-7}{18}$$

$$x = \frac{-7}{18} : \frac{-3}{5}$$

$$x = \frac{35}{54}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{35}{54}$$

$$\frac{-1}{3}x - \frac{17}{12} = \frac{11}{36}$$

$$\frac{-1}{3}x = \frac{11}{36} + \frac{17}{12}$$

$$\frac{-1}{3}x = \frac{31}{18}$$

$$x = \frac{31}{18} : \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$x = \frac{-31}{6}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-31}{6}$$

Bài 6. Tìm x biết :

$$\text{a) } \frac{x}{2} + \frac{x}{5} = \frac{17}{10}$$

$$\text{b) } \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{21}{12}$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{x}{2} + \frac{x}{5} = \frac{17}{10}$$

$$x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{17}{10}$$

$$x \cdot \frac{7}{10} = \frac{17}{10}$$

$$x = \frac{17}{10} : \frac{7}{10}$$

$$x = \frac{17}{7}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{17}{7}$$

$$\text{b) } \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{21}{12}$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) x = \frac{21}{12}$$

$$\frac{7}{12}x = \frac{21}{12}$$

$$x = \frac{21}{12} : \frac{7}{12}$$

$$x = 3$$

$$\text{Vậy } x = 3$$

Bài 7. Tìm x biết :

$$a) \frac{x}{2} - \left(\frac{3x}{5} - \frac{13}{5} \right) = \left(\frac{7}{5} + \frac{7}{10}x \right)$$

$$b) \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{3} \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{5} \right) = \frac{5}{2-2x}$$

Lời giải

$$a) \frac{x}{2} - \left(\frac{3x}{5} - \frac{13}{5} \right) = \left(\frac{7}{5} + \frac{7}{10}x \right)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{3x}{5} + \frac{13}{5} = \frac{7}{5} + \frac{7}{10}x$$

$$\frac{x}{2} - \frac{3x}{5} - \frac{7x}{10} = \frac{7}{5} - \frac{13}{5}$$

$$\frac{-4}{5}x = \frac{-6}{5}$$

$$x = \frac{-6}{5} : \frac{-4}{5} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{3}{2}$$

$$b) \frac{1}{x-1} + \frac{3}{10} = \frac{5}{2-2x}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{2(x-1)} = \frac{-3}{10}$$

$$\frac{7}{2(x-1)} = \frac{-3}{10}$$

$$2(x-1) = -\frac{70}{3}$$

$$x-1 = \frac{-35}{3} \Rightarrow x = \frac{-32}{3}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-32}{3}$$

Bài 8. Tìm x biết :

$$a) \frac{2x-3}{3} + \frac{-3}{2} = \frac{5-3x}{6} - \frac{1}{3}$$

$$b) \frac{2}{3x} - \frac{3}{12} = \frac{4}{5} - \left(\frac{7}{x} - 2 \right)$$

Lời giải

$$a) \frac{2x-3}{3} + \frac{-3}{2} = \frac{5-3x}{6} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{4x-6+(-9)}{6} = \frac{5-3x-2}{6}$$

$$4x-15=3-3x$$

$$7x=18$$

$$x = \frac{18}{7}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{18}{7}$$

$$b) \frac{2}{3x} - \frac{3}{12} = \frac{4}{5} - \left(\frac{7}{x} - 2 \right)$$

$$\frac{2}{3x} - \frac{1}{4} = \frac{4}{5} - \frac{7}{x} + 2$$

$$\frac{2}{3x} + \frac{7}{x} = \frac{4}{5} + \frac{1}{4} + 2$$

$$\frac{23}{3x} = \frac{61}{20}$$

$$3x = \frac{460}{61}$$

$$x = \frac{460}{183}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{460}{183}$$

Bài 9. Tìm x biết :

$$\frac{2}{5} - \left[\frac{3}{4} - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{3}{5}$$

Lời giải

$$\frac{2}{5} - \left[\frac{3}{4} - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{4} - \left(x + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{4} - \left(x + \frac{1}{2} \right) = \frac{-1}{5}$$

$$x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{-1}{5}$$

$$x + \frac{1}{2} = \frac{19}{20}$$

$$x = \frac{19}{20} - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{9}{20}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{9}{20}$$

Bài 10. Tìm x biết :

$$\frac{25}{8} : \left[\frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{5}{4}$$

Lời giải

$$\frac{25}{8} : \left[\frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2} \right) = \frac{25}{8} : \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{2}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{5}{2}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{-13}{6}$$

$$x = \frac{-13}{6} + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-5}{3}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-5}{3}$$

Dạng 3. Tìm x có chứa lũy thừa.**I. Phương pháp giải.**

- Đưa về cùng cơ số suy ra số mũ bằng nhau

$$a^m = a^n \Rightarrow m = n \quad (a \neq 1)$$

- Đưa về cùng số mũ suy ra cơ số bằng nhau nếu số mũ lẻ, cơ số bằng nhau hoặc đối nhau nếu số mũ chẵn

$$a^m = b^m \Rightarrow a = b \quad \text{nếu } m \text{ là số lẻ}$$

$$a^m = b^m \Rightarrow a = b \quad \text{hoặc } a = -b \quad \text{nếu } m \text{ là số chẵn}$$

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm x biết :

a) $x^2 = \frac{25}{64}$

b) $x^3 = \frac{8}{125}$

Lời giải

a) $x^2 = \frac{25}{64}$

b) $x^3 = \frac{8}{125}$

$$x^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2$$

$$x^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{5}{8}$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$\text{Vậy } x = \pm \frac{5}{8}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{2}{5}$$

Bài 2. Tìm x biết :

$$\text{a) } \left(x + \frac{2}{3}\right)^3 = \frac{125}{64}$$

$$\text{b) } \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8}{343}$$

Lời giải

$$\text{a) } \left(x + \frac{2}{3}\right)^3 = \frac{125}{64}$$

$$\text{b) } \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8}{343}$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{7}\right)^3$$

$$x + \frac{2}{3} = \frac{5}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$$

$$x = \frac{5}{4} - \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{7} + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{7}{12}$$

$$x = \frac{11}{14}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{7}{12}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{11}{14}$$

Bài 3. Tìm x biết :

$$\text{a) } \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$\text{b) } \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

Lời giải

$$\text{a) } \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$\text{b) } \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ x - \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \\ x + \frac{3}{4} = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \\ x = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

Vậy $x = 2$ hoặc $x = \frac{-4}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \\ x = \frac{-7}{4} - \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

Vậy $x = 1$ hoặc $x = \frac{-5}{2}$

Bài 4. Tìm x biết :

a) $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{49}{4}$

b) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{81}{25}$

Lời giải

a) $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{49}{4}$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{2}{3} = \frac{7}{2} \\ x - \frac{2}{3} = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} + \frac{2}{3} \\ x = \frac{-7}{2} + \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{6} \\ x = \frac{-17}{6} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{25}{6}$ hoặc $x = \frac{-17}{6}$

b) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{81}{25}$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{4} = \frac{9}{5} \\ x + \frac{1}{4} = \frac{-9}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} - \frac{1}{4} \\ x = \frac{-9}{5} - \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{31}{20} \\ x = \frac{-41}{20} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{31}{20}$ hoặc $x = \frac{-41}{20}$

Bài 5. Tìm x biết :

a) $3^x : 4^x = \frac{27}{64}$

b) $2^x : 5^x = \frac{16}{625}$

Lời giải

a) $3^x : 4^x = \frac{27}{64}$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Vậy $x = 3$

b) $2^x : 5^x = \frac{16}{625}$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Vậy $x = 4$ **Dạng 4. Đưa về tích bằng 0****I. Phương pháp giải.**

- Dùng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng (phép trừ) đưa về tích của hai số bằng 0
- Vận dụng tích của hai thừa số bằng 0 khi một trong hai thừa số bằng 0 để tìm x

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ hoặc } b = 0$$

II. Bài toán.**Bài 1.** Tìm x biết :

a) $\frac{x-3}{13} + \frac{x-3}{14} = \frac{x-3}{15} + \frac{x-3}{16}$

b) $\frac{x+1}{65} + \frac{x+3}{63} = \frac{x+5}{61} + \frac{x+7}{59}$

Lời giải

a) $\frac{x-3}{13} + \frac{x-3}{14} - \frac{x-3}{15} - \frac{x-3}{16} = 0$

$$(x-3)\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x-3 = 0 \text{ vì } \frac{1}{13} - \frac{1}{15} > 0 \text{ và } \frac{1}{14} - \frac{1}{16} > 0 \text{ nên } \frac{1}{13} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} > 0$$

Vậy $x = 3$

$$b) \frac{x+1}{65} + \frac{x+3}{63} = \frac{x+5}{61} + \frac{x+7}{59}$$

$$\left(\frac{x+1}{65} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{63} + 1\right) = \left(\frac{x+5}{61} + 1\right) + \left(\frac{x+7}{59} + 1\right)$$

$$\frac{x+66}{65} + \frac{x+66}{63} = \frac{x+66}{61} + \frac{x+66}{59}$$

$$(x+66)\left(\frac{1}{65} + \frac{1}{63} - \frac{1}{61} - \frac{1}{59}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x+66 = 0 \text{ vì } \frac{1}{65} + \frac{1}{63} - \frac{1}{61} - \frac{1}{59} < 0$$

$$x = -66$$

Vậy $x = -66$

Bài 2. Tìm x biết :

$$a) \frac{29-x}{21} + \frac{27-x}{23} + \frac{25-x}{25} + \frac{23-x}{27} + \frac{21-x}{29} = -5$$

$$b) \frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$$

Lời giải

$$a) \frac{29-x}{21} + \frac{27-x}{23} + \frac{25-x}{25} + \frac{23-x}{27} + \frac{21-x}{29} = -5$$

$$\left(\frac{29-x}{21} + 1\right) + \left(\frac{27-x}{23} + 1\right) + \left(\frac{25-x}{25} + 1\right) + \left(\frac{23-x}{27} + 1\right) + \left(\frac{21-x}{29} + 1\right) = 0$$

$$\frac{50-x}{21} + \frac{50-x}{23} + \frac{50-x}{25} + \frac{50-x}{27} + \frac{50-x}{29} = 0$$

$$(50-x)\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 50-x = 0 \text{ vì } \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} > 0$$

$$x = 50$$

Vậy $x = 50$

$$b) \frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$$

$$\left(\frac{x-10}{30}-3\right)+\left(\frac{x-14}{43}-2\right)+\left(\frac{x-5}{95}-1\right)+\left(\frac{x-148}{8}+6\right)=0$$

$$\frac{x-100}{30}+\frac{x-100}{43}+\frac{x-100}{95}+\frac{x-100}{8}=0$$

$$(x-100)\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{43}+\frac{1}{95}+\frac{1}{8}\right)=0$$

$$\Rightarrow x-100=0 \text{ vì } \frac{1}{30}+\frac{1}{43}+\frac{1}{95}+\frac{1}{8}>0$$

$$x=100$$

Vậy $x=100$

Bài 3. Tìm x biết :

$$a) \frac{x-5}{100}+\frac{x-4}{101}+\frac{x-3}{102}=\frac{x-100}{5}+\frac{x-101}{4}+\frac{x-102}{3}$$

$$b) \frac{x-2}{7}+\frac{x-1}{8}=\frac{x-4}{5}+\frac{x-3}{6}$$

Lời giải

$$a) \frac{x-5}{100}+\frac{x-4}{101}+\frac{x-3}{102}=\frac{x-100}{5}+\frac{x-101}{4}+\frac{x-102}{3}$$

$$\left(\frac{x-5}{100}-1\right)+\left(\frac{x-4}{101}-1\right)+\left(\frac{x-3}{102}-1\right)=\left(\frac{x-100}{5}-1\right)+\left(\frac{x-101}{4}-1\right)+\left(\frac{x-102}{3}-1\right)$$

$$\frac{x-105}{100}+\frac{x-105}{101}+\frac{x-105}{102}=\frac{x-105}{5}+\frac{x-105}{4}+\frac{x-105}{3}$$

$$\frac{x-105}{100}+\frac{x-105}{101}+\frac{x-105}{102}-\frac{x-105}{5}-\frac{x-105}{4}-\frac{x-105}{3}=0$$

$$\frac{x-105}{100}+\frac{x-105}{101}+\frac{x-105}{102}-\frac{x-105}{5}-\frac{x-105}{4}-\frac{x-105}{3}=0$$

$$(x-105)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow x-105=0 \text{ vì } \frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}<0$$

$$x=105$$

Vậy $x=105$

$$b) \frac{x-2}{7}+\frac{x-1}{8}=\frac{x-4}{5}+\frac{x-3}{6}$$

$$\left(\frac{x-2}{7}-1\right)+\left(\frac{x-1}{8}-1\right)=\left(\frac{x-4}{5}-1\right)+\left(\frac{x-3}{6}-1\right)$$

$$\frac{x-9}{7}+\frac{x-9}{8}=\frac{x-9}{5}+\frac{x-9}{6}$$

$$(x-9)\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=0$$

$$\Rightarrow x-9=0 \text{ vì } \frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}<0$$

$$x=9$$

Vậy $x=9$

Bài 4. Tìm x biết :

$$\text{a) } \frac{x+1}{94}+\frac{x+2}{93}+\frac{x+3}{92}=\frac{x+4}{91}+\frac{x+5}{90}+\frac{x+6}{89}$$

$$\text{b) } \frac{2x+19}{21}-\frac{2x+17}{23}=\frac{2x+7}{33}-\frac{2x+5}{35}$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{x+1}{94}+\frac{x+2}{93}+\frac{x+3}{92}=\frac{x+4}{91}+\frac{x+5}{90}+\frac{x+6}{89}$$

$$\left(\frac{x+1}{94}+1\right)+\left(\frac{x+2}{93}+1\right)+\left(\frac{x+3}{92}+1\right)=\left(\frac{x+4}{91}+1\right)+\left(\frac{x+5}{90}+1\right)+\left(\frac{x+6}{89}+1\right)$$

$$\frac{x+95}{94}+\frac{x+95}{93}+\frac{x+95}{92}=\frac{x+95}{91}+\frac{x+95}{90}+\frac{x+95}{89}$$

$$(x+95)\left(\frac{1}{94}+\frac{1}{93}+\frac{1}{92}-\frac{1}{91}-\frac{1}{90}-\frac{1}{89}\right)=0$$

$$\Rightarrow x+95=0 \text{ vì } \frac{1}{94}+\frac{1}{93}+\frac{1}{92}-\frac{1}{91}-\frac{1}{90}-\frac{1}{89}<0$$

$$x=-95$$

Vậy $x=-95$

$$\text{b) } \frac{2x+19}{21}-\frac{2x+17}{23}=\frac{2x+7}{33}-\frac{2x+5}{35}$$

$$\left(\frac{2x+19}{21}+1\right)-\left(\frac{2x+17}{23}+1\right)=\left(\frac{2x+7}{33}+1\right)-\left(\frac{2x+5}{35}+1\right)$$

$$\frac{2x+40}{21}+\frac{2x+40}{35}=\frac{2x+40}{33}+\frac{2x+40}{23}$$

$$(2x+40)\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{35}-\frac{1}{33}-\frac{1}{23}\right)=0$$

$$\Rightarrow 2x+40=0 \text{ vì } \frac{1}{21}+\frac{1}{35}-\frac{1}{33}-\frac{1}{23} \neq 0$$

$$x=-20$$

Vậy $x=-20$

Bài 5. Tìm x biết :

$$a) \frac{x-1}{59}+\frac{x-2}{58}+\frac{x-3}{57}=\frac{x-4}{56}+\frac{x-5}{55}+\frac{x-6}{54}$$

$$b) \frac{x+1}{15}+\frac{x+2}{14}=\frac{x+3}{13}+\frac{x+4}{12}$$

Lời giải

$$a) \frac{x-1}{59}+\frac{x-2}{58}+\frac{x-3}{57}=\frac{x-4}{56}+\frac{x-5}{55}+\frac{x-6}{54}$$

$$\left(\frac{x-1}{59}-1\right)+\left(\frac{x-2}{58}-1\right)+\left(\frac{x-3}{57}-1\right)=\left(\frac{x-4}{56}-1\right)+\left(\frac{x-5}{55}-1\right)+\left(\frac{x-6}{54}-1\right)$$

$$\frac{x-60}{59}+\frac{x-60}{58}+\frac{x-60}{57}=\frac{x-60}{56}+\frac{x-60}{55}+\frac{x-60}{54}$$

$$(x-60)\left(\frac{1}{59}+\frac{1}{58}+\frac{1}{57}-\frac{1}{56}-\frac{1}{55}-\frac{1}{54}\right)=0$$

$$\Rightarrow x-60=0 \text{ vì } \frac{1}{59}+\frac{1}{58}+\frac{1}{57}-\frac{1}{56}-\frac{1}{55}-\frac{1}{54} < 0$$

$$x=60$$

Vậy $x=60$

$$b) \frac{x+1}{15}+\frac{x+2}{14}=\frac{x+3}{13}+\frac{x+4}{12}$$

$$\left(\frac{x+1}{15}+1\right)+\left(\frac{x+2}{14}+1\right)=\left(\frac{x+3}{13}+1\right)+\left(\frac{x+4}{12}+1\right)$$

$$\frac{x+16}{15}+\frac{x+16}{14}=\frac{x+16}{13}+\frac{x+16}{12}$$

$$(x+16)\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{14}-\frac{1}{13}-\frac{1}{12}\right)=0$$

$$\Rightarrow x+16=0 \text{ vì } \frac{1}{15}+\frac{1}{14}-\frac{1}{13}-\frac{1}{12} < 0$$

$$x = -16$$

Vậy $x = -16$

Bài 6. Tìm x biết :

$$a) \frac{x-5}{1990} + \frac{x-15}{1980} = \frac{x-1990}{5} + \frac{x-1980}{15}$$

$$b) \frac{x-1}{2015} + \frac{x-3}{2013} = \frac{x-5}{2011} + \frac{x-7}{2009}$$

Lời giải

$$a) \frac{x-5}{1990} + \frac{x-15}{1980} = \frac{x-1990}{5} + \frac{x-1980}{15}$$

$$\left(\frac{x-5}{1990} - 1\right) + \left(\frac{x-15}{1980} - 1\right) = \left(\frac{x-1990}{5} - 1\right) + \left(\frac{x-1980}{15} - 1\right)$$

$$\frac{x-1995}{1990} + \frac{x-1995}{1980} = \frac{x-1995}{5} + \frac{x-1995}{15}$$

$$\Rightarrow x-1995 = 0 \Rightarrow x = 1995$$

Vậy $x = 1995$

$$b) \frac{x-1}{2015} + \frac{x-3}{2013} = \frac{x-5}{2011} + \frac{x-7}{2009}$$

$$\left(\frac{x-1}{2015} - 1\right) + \left(\frac{x-3}{2013} - 1\right) = \left(\frac{x-5}{2011} - 1\right) + \left(\frac{x-7}{2009} - 1\right)$$

$$\frac{x-2016}{2015} + \frac{x-2016}{2013} = \frac{x-2016}{2011} + \frac{x-2016}{2009}$$

$$\Rightarrow x-2016 = 0 \Rightarrow x = 2016$$

Vậy $x = 2016$

Bài 7. Tìm x biết :

$$a) \frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$$

$$b) \frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} = -4$$

Lời giải

$$a) \frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$$

$$(x+1) \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Vậy $x = -1$

$$b) \frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} = -4$$

$$\left(\frac{315-x}{101} + 1\right) + \left(\frac{313-x}{103} + 1\right) + \left(\frac{311-x}{105} + 1\right) + \left(\frac{309-x}{107} + 1\right) = 0$$

$$\frac{416-x}{101} + \frac{416-x}{103} + \frac{416-x}{105} + \frac{416-x}{107} = 0$$

$$\Rightarrow 416 - x = 0 \Rightarrow x = 416$$

Vậy $x = 416$

Bài 8. Tìm x biết :

$$a) \frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$$

$$b) \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

Lời giải

$$a) \frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$$

$$\left(\frac{x-1}{2009} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{2008} - 1\right) = \left(\frac{x-3}{2007} - 1\right) + \left(\frac{x-4}{2006} - 1\right)$$

$$\frac{x-2010}{2009} + \frac{x-2010}{2008} = \frac{x-2010}{2007} + \frac{x-2010}{2006}$$

$$\Rightarrow x - 2010 = 0 \Rightarrow x = 2010$$

Vậy $x = 2010$

$$b) \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

$$\left(\frac{59-x}{41} + 1\right) + \left(\frac{57-x}{43} + 1\right) + \left(\frac{55-x}{45} + 1\right) + \left(\frac{53-x}{47} + 1\right) + \left(\frac{51-x}{49} + 1\right) = 0$$

$$\frac{100-x}{41} + \frac{100-x}{43} + \frac{100-x}{45} + \frac{100-x}{47} + \frac{100-x}{49} = 0$$

$$\Rightarrow 100 - x = 0 \Rightarrow x = 100$$

Vậy $x = 100$

Bài 9. Tìm x biết :

$$a) \frac{x+14}{86} + \frac{x+15}{85} + \frac{x+16}{84} + \frac{x+17}{83} = -4$$

$$b) \frac{x-90}{10} + \frac{x-76}{12} + \frac{x-58}{14} + \frac{x-36}{16} + \frac{x-15}{17} = 15$$

Lời giải

$$a) \frac{x+14}{86} + \frac{x+15}{85} + \frac{x+16}{84} + \frac{x+17}{83} = -4$$

$$\left(\frac{x+14}{86} + 1\right) + \left(\frac{x+15}{85} + 1\right) + \left(\frac{x+16}{84} + 1\right) + \left(\frac{x+17}{83} + 1\right) = 0$$

$$\frac{x+100}{86} + \frac{x+100}{85} + \frac{x+100}{84} + \frac{x+100}{83} = 0$$

$$\Rightarrow x+100=0 \Rightarrow x=-100$$

Vậy $x = -100$

$$b) \frac{x-90}{10} + \frac{x-76}{12} + \frac{x-58}{14} + \frac{x-36}{16} + \frac{x-15}{17} = 15$$

$$\left(\frac{x-90}{10} - 1\right) + \left(\frac{x-76}{12} - 2\right) + \left(\frac{x-58}{14} - 3\right) + \left(\frac{x-36}{16} - 4\right) + \left(\frac{x-15}{17} - 5\right) = 0$$

$$\frac{x-100}{10} + \frac{x-100}{12} + \frac{x-100}{14} + \frac{x-100}{16} + \frac{x-100}{17} = 0$$

$$\Rightarrow x-100=0 \Rightarrow x=100$$

Vậy $x = 100$

Bài 10. Tìm x biết :

$$\frac{x-1}{2011} + \frac{x-2}{2010} - \frac{x-3}{2009} = \frac{x-4}{2008}$$

Lời giải

$$\frac{x-1}{2011} + \frac{x-2}{2010} - \frac{x-3}{2009} = \frac{x-4}{2008}$$

$$\left(\frac{x-1}{2011} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{2010} - 1\right) - \left(\frac{x-3}{2009} - 1\right) - \left(\frac{x-4}{2008} - 1\right) = 0$$

$$\frac{x-2012}{2011} + \frac{x-2012}{2010} - \frac{x-2012}{2009} - \frac{x-2012}{2008} = 0$$

$$\Rightarrow x-2012=0 \Rightarrow x=2012$$

Vậy $x = 2012$

Bài 11. Tìm x biết :

$$\frac{x+2020}{2018} + \frac{x+2020}{2019} = \frac{x+2020}{2020} + \frac{x+2020}{2021}$$

Lời giải

$$\frac{x+2020}{2018} + \frac{x+2020}{2019} = \frac{x+2020}{2020} + \frac{x+2020}{2021}$$

$$(x+2020)\left(\frac{1}{2018} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x+2020=0 \Rightarrow x=-2020$$

Vậy $x = -2020$

Bài 12. Tìm x biết :

$$\frac{x-10}{10} + \frac{x-10}{11} + \frac{x-10}{12} = \frac{x-10}{13} + \frac{x-10}{14}$$

Lời giải

$$\frac{x-10}{10} + \frac{x-10}{11} + \frac{x-10}{12} = \frac{x-10}{13} + \frac{x-10}{14}$$

$$(x-10)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x-10=0 \Rightarrow x=10$$

Vậy $x = 10$

Bài 13. Tìm x biết :

$$\frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$$

Lời giải

$$\frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$$

$$\left(\frac{x-10}{30} - 3\right) + \left(\frac{x-14}{43} - 2\right) + \left(\frac{x-5}{95} - 1\right) + \left(\frac{x-148}{8} + 6\right) = 0$$

$$\frac{x-100}{30} + \frac{x-100}{43} + \frac{x-100}{95} + \frac{x-100}{8} = 0$$

$$\Rightarrow x-100=0 \Rightarrow x=100$$

Vậy $x = 100$

Bài 14. Tìm x biết : $\frac{x-1}{2015} + \frac{x-3}{2013} = \frac{x-5}{2011} + \frac{x-7}{2009}$

Lời giải

$$\frac{x-1}{2015} + \frac{x-3}{2013} = \frac{x-5}{2011} + \frac{x-7}{2009}$$

$$\left(\frac{x-1}{2015} - 1\right) + \left(\frac{x-3}{2013} - 1\right) = \left(\frac{x-5}{2011} - 1\right) + \left(\frac{x-7}{2009} - 1\right)$$

$$\frac{x-2016}{2015} + \frac{x-2016}{2013} = \frac{x-2016}{2011} + \frac{x-2016}{2009}$$

$$\Rightarrow x - 2016 = 0 \Rightarrow x = 2016$$

Vậy $x = 2016$

Bài 15. Tìm x biết : $\frac{x+2}{327} + \frac{x+3}{326} + \frac{x+4}{325} + \frac{x+5}{324} + \frac{x+349}{5} = 0$

Lời giải

$$\frac{x+2}{327} + \frac{x+3}{326} + \frac{x+4}{325} + \frac{x+5}{324} + \frac{x+349}{5} = 0$$

$$\left(\frac{x+2}{327} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{326} + 1\right) + \left(\frac{x+4}{325} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{324} + 1\right) + \left(\frac{x+349}{5} - 5\right) = 0$$

$$\frac{x+329}{327} + \frac{x+329}{326} + \frac{x+329}{325} + \frac{x+329}{324} + \frac{x+329}{5} = 0$$

$$(x+329) \left(\frac{1}{327} + \frac{1}{326} + \frac{1}{325} + \frac{1}{324} + \frac{1}{5} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x + 329 = 0$$

$$x = -329$$

Vậy $x = -329$

Dạng 5. Tìm x, y nguyên

I. Phương pháp giải.

- Cách tìm x trong phân thức : Quy đồng mẫu số đưa về tích của hai số bằng một số nguyên, dựa vào cách tìm ước của một số để tìm x

- Cách tìm x áp dụng so sánh phân số :

Trong các phân số có cùng mẫu nguyên dương, phân số nào lớn hơn thì tử số lớn hơn.

Trong các phân số có cùng tử nguyên dương, phân số nào lớn hơn thì mẫu số nhỏ hơn.

- Cách tìm x nguyên để A có giá trị nguyên: Viết A bằng một số nguyên cộng với một phân số có tử là số nguyên, mẫu số bằng mẫu số của A

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm cặp số nguyên (x, y) biết $\frac{x-1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{y+2}$ (ĐK: $y \neq -2$)

Lời giải

$$\frac{x-1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{y+2}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{9} + \frac{3}{9} = \frac{1}{y+2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{9} = \frac{1}{y+2}$$

$$\Rightarrow (x+2)(y+2) = 9$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x+2, y+2 \in U(9) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

$x+2$	-9	-3	-1	1	3	9
$y+2$	-1	-3	-9	9	3	1
x	-11	-5	-3	-1	1	7
y	-3	-5	-11	7	1	-1

Các cặp giá trị tìm được thỏa mãn điều kiện:

$$(-11; -3); (-5; -5); (-3; -11); (-1; 7); (1; 1); (7; -1).$$

Bài 2. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $\frac{x}{9} = \frac{3}{y} + \frac{1}{18}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{9} = \frac{3}{y} + \frac{1}{18}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{9} - \frac{1}{18} = \frac{3}{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{18} = \frac{3}{y}$$

Vì $\frac{2x-1}{18} = \frac{3}{y}$ nên $(2x-1)y = 54 \Rightarrow (2x-1); y$ là ước của 54

$$U(54) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18; 27; 54\}$$

Vì x, y là số tự nhiên và $2x-1$ là số lẻ nên $(2x-1)y = 54 = 1.54 = 27.2 = 3.18 = 9.6$

Ta có bảng sau:

$2x-1$	1	27	3	9
y	54	2	18	6
x	1	14	2	5

Vậy có 4 cặp $(x; y)$ là $(1; 54), (14; 2), (2; 18), (5; 6)$

Bài 3. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) biết $\frac{x}{2} - \frac{1}{2y+1} = \frac{1}{6}$

Lời giải

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2y+1} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2y+1} \Leftrightarrow \frac{3x-1}{6} = \frac{1}{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(2y+1) = 6$$

Lập bảng

$3x-1$	1	2	3	6
x	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$2y+1$	6	3	2	1
y	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

Vậy $x=1; y=1$

Bài 4. Tìm các số x, y nguyên thỏa mãn:

$$\frac{5}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6} (x \neq 0)$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{5}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6} (x \neq 0) \Rightarrow \frac{15-xy}{3x} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 6(15-xy) = 3x$$

$$\Rightarrow 30 - 2xy = x$$

$$\Rightarrow x(2y+1) = 30$$

Vì $2y+1$ là số lẻ nên $2y+1$ ước lẻ của 30

Ta có bảng sau:

$2y+1$	1	-1	3	-3	5	-5	15	-15
x	30	-30	10	-10	6	-6	2	-2
y	0	-1	1	-2	2	3	7	-8

Vậy có 8 cặp số (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$(30; 0), (-30; -1), (10; 1), (-10; -2), (6; 2), (-6; 3), (2; 7), (-2; -8)$

Bài 5. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn:

$$\frac{1}{18} < \frac{x}{12} < \frac{y}{9} < \frac{1}{4}$$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{18} < \frac{x}{12} < \frac{y}{9} < \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{2}{36} < \frac{3x}{36} < \frac{4y}{36} < \frac{9}{36}$$

$$\Rightarrow 2 < 3x < 4y < 9 \Rightarrow \begin{cases} x=1; x=2 \\ y=1; y=2 \end{cases}$$

Thử lại ta được: $(x, y) = (1; 1); (1; 2); (2; 2)$

Bài 6. Tìm số nguyên x thỏa mãn:

$$\frac{2}{-5} \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{4}$$

Lời giải

Ta có: $\frac{2}{-5} \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{-8}{20} \leq \frac{2x}{20} < \frac{5}{20}$$

$$\Rightarrow -8 \leq 2x < 5 \Rightarrow x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$$

Bài 7: Cho phân số $A = \frac{x+5}{x-2}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{x+5}{x-2} = \frac{x-2+7}{x-2} = 1 + \frac{7}{x-2}$$

Để A nhận giá trị nguyên thì $\frac{7}{x-2}$ nhận giá trị nguyên

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{7}{x-2}$ nhận giá trị nguyên khi $7 : (x-2)$

$$\Rightarrow x-2 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$$

Xét các trường hợp :

$$\text{Trường hợp 1: } x-2 = -7$$

$$\Rightarrow x = -5$$

$$\text{Trường hợp 2: } x-2 = -1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$\text{Trường hợp 3: } x-2 = 1$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$\text{Trường hợp 4: } x-2 = 7$$

$$\Rightarrow x = 9$$

$$\text{Vậy } x \in \{-5; 1; 3; 9\}$$

Bài 8: Cho phân số $A = \frac{2x-3}{x+1}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2x+2-5}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}$$

Để A nhận giá trị nguyên thì $\frac{5}{x+1}$ nhận giá trị nguyên

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{5}{x+1}$ nhận giá trị nguyên khi $5 : (x+1)$

$$\Rightarrow x+1 \in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$$

Xét các trường hợp :

$$\text{Trường hợp 1: } x+1 = -5$$

$$\Rightarrow x = -6$$

$$\text{Trường hợp 2: } x+1 = -1$$

$$\Rightarrow x = -2$$

Trường hợp 3: $x+1=1$

$$\Rightarrow x = 0$$

Trường hợp 4: $x+1=5$

$$\Rightarrow x = 4$$

Vậy $x \in \{-6; -2; 0; 4\}$

Dạng 6. Tìm x trong dãy các phép tính theo quy luật

I. Phương pháp giải.

Sử dụng công thức tính dãy các phép tính theo quy luật để tìm x

$$\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \quad (n, k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\frac{2k}{n(n+k)(n+2k)} = \frac{1}{n(n+k)} - \frac{1}{(n+k)(n+2k)} \quad (n, k \in \mathbb{N}^*)$$

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm x biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{9}{1}$

Lời giải

Ta có: Tách $\frac{9}{1}$ thành 9 số 1

$$\Rightarrow \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{9}{1} = \left(\frac{1}{9} + 1\right) + \left(\frac{2}{8} + 1\right) + \left(\frac{3}{7} + 1\right) + \dots + \left(\frac{8}{2} + 1\right) + 1$$

$$= \frac{10}{9} + \frac{10}{8} + \frac{10}{7} + \dots + \frac{10}{2} + \frac{10}{1} = 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right)$$

$$\text{Khi đó } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right)x = 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right) \Rightarrow x = 10$$

Vậy $x = 10$

Bài 2. Tìm x biết: $\frac{2}{1^2} \cdot \frac{6}{2^2} \cdot \frac{12}{3^2} \cdot \frac{20}{4^2} \dots \frac{110}{10^2} \cdot x = -20$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2}{1^2} \cdot \frac{6}{2^2} \cdot \frac{12}{3^2} \cdot \frac{20}{4^2} \dots \frac{110}{10^2} \cdot x = -20$$

$$\frac{1.2}{1.1} \cdot \frac{2.3}{2.2} \cdot \frac{3.4}{3.3} \cdot \frac{4.5}{4.4} \dots \frac{10.11}{10.10} \cdot x = -20$$

$$\frac{(1.2.3\dots 10)(2.3\dots 11)}{(1.2\dots 10)(1.2\dots 10)} \cdot x = -20$$

$$\Rightarrow 11x = -20$$

$$x = \frac{-20}{11}$$

Vậy $x = \frac{-20}{11}$

Bài 3. Tìm x biết: $\frac{3}{35} + \frac{3}{63} + \frac{3}{99} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35}$

Lời giải

Ta có: $\frac{3}{35} + \frac{3}{63} + \frac{3}{99} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35}$

$$\frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35}$$

$$\frac{3}{2} \left[\frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + \dots + \frac{2}{x(x+2)} \right] = \frac{24}{35}$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} \right) = \frac{24}{35}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} = \frac{24}{35} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} = \frac{16}{35}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{16}{35} = \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{-9}{35}$$

$$\Rightarrow x+2 = \frac{-35}{9}$$

$$x = \frac{-35}{9} - 2$$

$$x = \frac{-53}{9}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-53}{9}$$

Bài 4. Tìm x biết : $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$

Lời giải

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

$$\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{98}{99}$$

$$1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{98}{99}$$

$$\frac{1}{2x+1} = 1 - \frac{98}{99}$$

$$\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{99}$$

$$\Rightarrow 2x+1 = 99$$

$$2x = 98$$

$$x = 49$$

$$\text{Vậy } x = 49$$

Bài 5. Tìm x biết : $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991}$

Lời giải

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991}$$

$$\frac{2}{2} + \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991}$$

$$2 \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right] = 1\frac{1989}{1991}$$

$$2\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{3980}{1991}$$

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{1990}{1991}$$

$$\frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1990}{1991}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1991}$$

$$\Rightarrow x+1 = 1991$$

$$x = 1991 - 1$$

$$x = 1990$$

$$\text{Vậy } x = 1990$$

Bài 6. Tìm x biết : $\frac{4}{3.5} + \frac{8}{5.9} + \frac{12}{9.15} + \dots + \frac{32}{x(x+16)} = \frac{16}{25}$

Lời giải

$$\frac{4}{3.5} + \frac{8}{5.9} + \frac{12}{9.15} + \dots + \frac{32}{x(x+16)} = \frac{16}{25}$$

$$2\left[\frac{2}{3.4} + \frac{4}{5.9} + \frac{6}{9.15} + \dots + \frac{16}{x(x+16)}\right] = \frac{16}{25}$$

$$2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+16}\right) = \frac{16}{25}$$

$$2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x+16}\right) = \frac{16}{25}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{x+16} = \frac{8}{25}$$

$$\frac{1}{x+16} = \frac{1}{3} - \frac{8}{25} = \frac{1}{75}$$

$$x+16 = 75$$

$$x = 75 - 16 = 59$$

$$\text{Vậy } x = 59$$

Bài 7. Tìm x biết : $x:\frac{1}{2}+x:\frac{1}{4}+x:\frac{1}{8}+\dots+x:\frac{1}{512}=511$

Lời giải

$$x:\frac{1}{2}+x:\frac{1}{4}+x:\frac{1}{8}+\dots+x:\frac{1}{512}=511$$

$$2x+4x+8x+\dots+512x=511$$

$$x(2+4+8+16+\dots+512)=511$$

$$\text{Đặt } A = 2+4+8+16+\dots+512$$

$$\Rightarrow 2A = 4+8+16+\dots+1024 \Rightarrow 2A - A = 1024 - 2 = 1022$$

$$\text{Khi đó ta có: } xA = 511 \Rightarrow x.1022 = 511$$

$$\Rightarrow x = \frac{511}{1022} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}$$

Bài 8. Tìm x biết : $\frac{1}{14}+\frac{1}{35}+\frac{1}{65}+\dots+\frac{2}{x^2+3x}=\frac{1}{9}$

Lời giải

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{35}+\frac{1}{65}+\dots+\frac{2}{x^2+3x}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{2}{28}+\frac{2}{70}+\frac{2}{130}+\dots+\frac{2}{x(x+3)}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{2}{4.7}+\frac{2}{7.10}+\frac{2}{10.13}+\dots+\frac{2}{x(x+3)}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{2}{3}\left[\frac{3}{4.7}+\frac{3}{7.10}+\dots+\frac{3}{x(x+3)}\right]=\frac{1}{9}$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{x+3}$$

$$\Rightarrow x+3=12$$

$$x=9$$

$$\text{Vậy } x=9$$

Bài 9. Tìm x biết : $\frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} + \dots + \frac{2}{x(x+2)} = \frac{6}{35}$

Lời giải

$$\frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + \dots + \frac{2}{x(x+2)} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{5} - \frac{6}{35}$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{35}$$

$$x+2=35$$

$$x=35-2$$

$$x=33$$

$$\text{Vậy } x=33$$

Bài 10. Tìm x biết : $\frac{(1.2+2.3+3.4+\dots+98.99).x}{26950} = 12\frac{6}{7} : \frac{3}{2}$

Lời giải

$$\text{Đặt : } A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99$$

$$\text{Tính } A \text{ ta được : } 3A = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + \dots + 98.99(100-97)$$

$$3A = (1.2.3 - 0.1.2) + (2.3.4 - 1.2.3) + \dots + (98.99.100 - 97.98.99) = 98.99.100$$

$$A = \frac{98.99.100}{3}$$

$$\text{Thay vào ta có : } \frac{98.99.100.x}{3.26950} = 12 \frac{6}{7} : \frac{3}{2}$$

$$12x = \frac{60}{7} \Rightarrow x = \frac{5}{7}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{7}$$

Bài 11. Tìm x biết : $2x + \frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \frac{31}{31} + \frac{43}{42} + \frac{57}{56} + \frac{73}{72} + \frac{91}{90} = 10$

Lời giải

Ta có :

$$2x + \frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \frac{31}{31} + \frac{43}{42} + \frac{57}{56} + \frac{73}{72} + \frac{91}{90} = 10$$

$$2x + \left(1 + \frac{1}{6}\right) + \left(1 + \frac{1}{12}\right) + \left(1 + \frac{1}{20}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{90}\right) = 10$$

$$2x + 8 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{9.10} = 10$$

$$2x + 8 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = 10$$

$$2x = \frac{8}{5}$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{4}{5}$$

Bài 12. Tìm x biết : $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{98.99.100}\right)x = \frac{49}{200}$

Lời giải

$$\text{Ta có : } \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{98.99.100}\right)x = \frac{49}{200}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{98.99.100}\right).x = \frac{49}{200}$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{98.99} - \frac{1}{99.100} \right) \right] \cdot x = \frac{49}{200}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{99.100} \right) \cdot x = \frac{49}{200}$$

$$x = \frac{99}{101}$$

Vậy $x = \frac{99}{101}$

Bài 13. Tìm x biết : $\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \right) x = \frac{2012}{51} + \frac{2012}{52} + \dots + \frac{2012}{100}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100} \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó : } \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \right) \cdot x = 2012 \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100} \right)$$

$$\Rightarrow x = 2012$$

Vậy $x = 2012$

Bài 14. Tìm x biết : $\frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$

Lời giải

$$\frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+8} \right) + \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+14} \right) = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+14} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$\frac{12}{(x+2)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

$$\Rightarrow 12 = x$$

Vậy $x = 12$

Bài 15. Tìm x biết : $(x-20) \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \dots + \frac{199}{1}} = \frac{1}{2000}$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \dots + \frac{199}{1}}.$$

Ta có mẫu của A : $\left(\frac{1}{199} + 1\right) + \left(\frac{2}{198} + 1\right) + \dots + \left(\frac{198}{2} + 1\right) + 1 = \frac{200}{199} + \frac{200}{198} + \dots + \frac{200}{2} + \frac{200}{200}$

$$\text{Khi đó } A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{200\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{200}\right)} = \frac{1}{200}$$

$$\text{Như vậy ta có: } (x-20) \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{2000}$$

$$x-20 = \frac{1}{10}$$

$$x = \frac{1}{10} + 20$$

$$x = \frac{201}{10}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{201}{10}$$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2018.2019}\right) \cdot x = \frac{2018}{2019}$

(HSG huyện Nông Cống – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

$$\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2018.2019}\right).x = \frac{2018}{2019}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}\right).x = \frac{2018}{2019}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2019}\right).x = \frac{2018}{2019}$$

$$\frac{2018}{2019}.x = \frac{2018}{2019}$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Vậy $x = 1$

Bài 2: Tìm x , biết:

$$\frac{x-1}{12} + \frac{x-1}{20} + \frac{x-1}{30} + \frac{x-1}{42} + \frac{x-1}{56} + \frac{x-1}{72} = 224$$

(HSG huyện Hoa Lư – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

$$\frac{x-1}{12} + \frac{x-1}{20} + \frac{x-1}{30} + \frac{x-1}{42} + \frac{x-1}{56} + \frac{x-1}{72} = 224$$

$$(x-1) \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72}\right) = 224$$

$$(x-1) \cdot \left(\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9}\right) = 224$$

$$(x-1) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = 224$$

$$(x-1) \cdot \frac{2}{9} = 224$$

$$x-1 = 1008$$

$$x = 1009$$

Vậy $x = 1009$

Bài 3: Tìm x , biết:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{3} + \frac{5}{7} = 9\frac{5}{7}$$

(HSG huyện Thanh Ba – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{3} + \frac{5}{7} = 9\frac{5}{7}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{3} = 9\frac{5}{7} - \frac{5}{7}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{3} = 9$$

$$x - \frac{1}{2} = 3$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$\text{Vậy: } x = \frac{7}{2}.$$

Bài 4: Tìm x , biết:

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3}x - x + \frac{-1}{2}x\right) : \frac{2}{3} = -4$$

$$\text{b) } \frac{x-1}{2019} + \frac{x-2}{2020} = \frac{x-3}{2021} + \frac{x-4}{2022}$$

(HSG huyện Ngọc Lặc – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3}x - x + \frac{-1}{2}x\right) : \frac{2}{3} = -4$$

$$\left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{-1}{2}\right)x : \frac{2}{3} = -4$$

$$\frac{-5}{6}x : \frac{2}{3} = -4$$

$$\frac{-5}{6}x = -4 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{-5}{6}x = \frac{-8}{3}$$

$$x = \frac{-8}{3} : \frac{-5}{6}$$

$$x = \frac{16}{5}$$

Vậy $x = \frac{16}{5}$

b) $\frac{x-1}{2019} + \frac{x-2}{2020} = \frac{x-3}{2021} + \frac{x-4}{2022}$

$$\frac{x-1}{2019} + 1 + \frac{x-2}{2020} + 1 = \frac{x-3}{2021} + 1 + \frac{x-4}{2022} + 1$$

$$\frac{x+2018}{2019} + \frac{x+2018}{2020} = \frac{x+2018}{2021} + \frac{x+2018}{2022}$$

$$(x+2018) \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x+2018=0 \text{ Vì } \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} > 0$$

$$x = -2018$$

Vậy $x = -2018$

Bài 5: Cho phân số $A = \frac{n+8}{n-3}$. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

(HSG huyện Kiến Xương – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Ta có: $A = \frac{n+8}{n-3} = \frac{n-3+11}{n-3} = 1 + \frac{11}{n-3}$

Để A nhận giá trị nguyên thì $\frac{11}{n-3}$ nhận giá trị nguyên

Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{11}{n-3}$ nhận giá trị nguyên khi $11 : (n-3)$

$$\Rightarrow n-3 \in U(11) = \{-11; -1; 1; 11\}$$

Xét các trường hợp :

Trường hợp 1: $n-3 = -11$

$$\Rightarrow n = -8$$

Trường hợp 2: $n-3 = -1$

$$\Rightarrow n = 2$$

Trường hợp 3: $n-3 = 1$

$$\Rightarrow n = 4$$

Trường hợp 4: $n - 3 = 11$

$$\Rightarrow n = 14$$

Vậy $n \in \{-8; 2; 4; 14\}$

Bài 6: Tìm x biết: $\frac{2}{5.8} + \frac{2}{8.11} + \frac{2}{11.14} + \dots + \frac{2}{x(x+3)} = \frac{101}{770}$

(HSG huyện Phú Xuyên – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

$$\frac{2}{5.8} + \frac{2}{8.11} + \frac{2}{11.14} + \dots + \frac{2}{x(x+3)} = \frac{101}{770}$$

$$2 \cdot \left(\frac{3}{5.8} + \frac{3}{8.11} + \frac{3}{11.14} + \dots + \frac{3}{x(x+3)} \right) = \frac{303}{770}$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{303}{770}$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{303}{770}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{x+3} = \frac{303}{1540}$$

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{5} - \frac{303}{1540}$$

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{308}$$

$$\Rightarrow x+3 = 308$$

$$x = 305$$

Vậy: $x = 305$.

Bài 7: Tìm x biết: $\frac{x+19}{2019} + \frac{x+18}{2018} + \frac{x+17}{2017} + \dots + \frac{x+1}{2001} = 19$

(HSG huyện Lương Tài – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

$$\frac{x+19}{2019} + \frac{x+18}{2018} + \frac{x+17}{2017} + \dots + \frac{x+1}{2001} = 19$$

$$\left(\frac{x+19}{2019}-1\right)+\left(\frac{x+18}{2018}-1\right)+\left(\frac{x+17}{2017}-1\right)+\dots+\left(\frac{x+1}{2001}-1\right)=0$$

$$\frac{x-2000}{2019}+\frac{x-2000}{2018}+\frac{x-2000}{2017}+\dots+\frac{x-2000}{2001}=0$$

$$(x-2000)\left(\frac{1}{2019}+\frac{1}{2018}+\frac{1}{2017}+\dots+\frac{1}{2001}\right)=0$$

$$\Rightarrow x-2000=0 \left(\text{Do } \frac{1}{2019}+\frac{1}{2018}+\frac{1}{2017}+\dots+\frac{1}{2001}>0 \right)$$

$$x=2000$$

Vậy $x=2000$

Bài 8: Tìm x biết:

$$1\frac{3}{5}+\left(\frac{\frac{2}{7}+\frac{2}{17}+\frac{2}{101}}{\frac{5}{7}+\frac{5}{17}+\frac{5}{101}}\right)x=\frac{16}{5}$$

(HSG huyện Ninh Bình – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

$$1\frac{3}{5}+\left(\frac{\frac{2}{7}+\frac{2}{17}+\frac{2}{101}}{\frac{5}{7}+\frac{5}{17}+\frac{5}{101}}\right)x=\frac{16}{5}$$

$$\frac{8}{5}+\left(\frac{2\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{17}+\frac{1}{101}\right)}{5\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{17}+\frac{1}{101}\right)}\right)x=\frac{16}{5}$$

$$\frac{8}{5}+\frac{2}{5}x=\frac{16}{5}$$

$$\frac{2}{5}x=\frac{16}{5}-\frac{8}{5}$$

$$\frac{2}{5}x=\frac{8}{5}$$

$$x=4$$

Vậy $x=4$

Bài 9: Tìm x biết:

$$x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}}$$

(HSG huyện Cum'Gar – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

$$x : \left(9\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{1,6 + \frac{8}{9} - \frac{8}{11}} \Rightarrow x : 8 = \frac{0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11}}{4 \left(0,4 + \frac{2}{9} - \frac{2}{11} \right)}$$

$$\Rightarrow x : 8 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 2.$$

Vậy $x = 2$

Bài 10: Tìm x biết: $213 - x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2020}} \right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2020}} \right) = 13$

(HSG huyện Gia Bình – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

$$\text{Đặt } S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2020}}$$

$$\Rightarrow 2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}$$

$$\Rightarrow 2S - S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2019}} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2020}} \right)$$

$$\Rightarrow S = 1 - \frac{1}{2^{2020}}$$

$$213 - x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2020}} \right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2020}} \right) = 13$$

$$\Rightarrow 213 - x \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2020}} \right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2020}} \right) = 13$$

$$\Rightarrow 213 - x = 13$$

$$\Rightarrow x = 200$$

Vậy $x = 200$

CHUYÊN ĐỀ PHÂN SỐ**CHỦ ĐỀ 5: HAI BÀI TOÁN VỀ PHÂN SỐ : TÌM GIÁ TRỊ PHÂN SỐ CỦA MỘT SỐ CHO TRƯỚC, TÌM MỘT SỐ BIẾT GIÁ TRỊ MỘT PHÂN SỐ CỦA NÓ****PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****BÀI TOÁN : TÌM GIÁ TRỊ PHÂN SỐ CỦA MỘT SỐ CHO TRƯỚC**

1. Quy tắc: Muốn tìm $\frac{m}{n}$ của một số b cho trước, ta tính $b \cdot \frac{m}{n} (m, n \in N, n \neq 0)$

2. Chú ý: $m\%$ của b là $b \cdot m\%$;

$m\%$ của b bằng $b\%$ của m ;

100% của a là a ;

50% của a là $a : 2$;

25% của a là $a : 4$

BÀI TOÁN : TÌM MỘT SỐ BIẾT GIÁ TRỊ MỘT PHÂN SỐ CỦA NÓ

1. Quy tắc: Muốn tìm một số biết $\frac{m}{n}$ của nó là a ta tính $a : \frac{m}{n} (m, n \in N^*)$

2. Chú ý:

+) Nếu $\frac{m}{n}$ của b là a thì $a = \frac{m}{n} \cdot b (m, n \in N^*)$

+) Nếu $a = \frac{m}{n}$ của b thì $a = \frac{m}{m+n}$ của tổng $(a+b)$ và $a = \frac{m}{m-n}$ của hiệu $(a-b)$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI**Dạng 1: Thực hiện phép tính áp dụng quy tắc hai bài toán cơ bản của phân số:****I. Phương pháp giải:**

Áp dụng các quy tắc:

+ Muốn tìm $\frac{m}{n}$ của một số b cho trước, ta tính $b \cdot \frac{m}{n} (m, n \in N, n \neq 0)$

+ Muốn tìm một số biết $\frac{m}{n}$ của nó là a ta tính $a : \frac{m}{n} (m, n \in N^*)$

II. Bài toán**1.1. Áp dụng bài toán tìm giá trị phân số của một số cho trước:**

Bài 1. Chọn đáp án đúng cho các câu hỏi sau:

a) $1\frac{3}{7}$ của $\frac{21}{25}$ là:

- A. $\frac{3}{5}$ B. $1\frac{1}{5}$ C. $2\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

b) 25% của $\left(3\frac{1}{4} + 8,75 - \frac{24}{21}\right)$ là:

- A. $3\frac{2}{7}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $2\frac{5}{7}$ D. $\frac{4}{7}$

Lời giải

a) $1\frac{3}{7}$ của $\frac{21}{25}$ là: $1\frac{3}{7} \cdot \frac{21}{25} = \frac{10}{7} \cdot \frac{21}{25} = \frac{6}{5}$. Chọn B

b) 25% của $\left(3\frac{1}{4} + 8,75 - \frac{24}{21}\right)$ là: $25\% \cdot \left(3\frac{1}{4} + 8,75 - \frac{24}{21}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{13}{4} + \frac{35}{4} - \frac{24}{21}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(12 - \frac{8}{7}\right) = \frac{19}{7}$

Chọn C

Bài 2. Điền dấu "x" vào ô thích hợp để được kết luận đúng

STT	Khẳng định	Đúng	Sai
1	50% của (50% của a) là a		
2	$\frac{100}{a}$ của ($a\%$ của b) là b ($a \neq 0$)		
3	$\frac{a}{b}$ của ($\frac{b}{c}$ của $\frac{c}{a}$) là 1 ($a, b, c \neq 0$)		
4	$m\%$ của $n\%$ là $m.n\%$		
5	$m\% + n\%$ là $(m+n)\%$		
6	$m\% : n\%$ là $\frac{m}{n}\%$ ($n \neq 0$)		

Lời giải

- 1) S 2) Đ 3) Đ 4) S 5) Đ 6) S

Bài 3. Nhân dịp lễ 30.4 và 1.5 một siêu thị đã giảm giá 15% một số hàng và đã sửa lại giá các mặt hàng ấy như sau:

40.000đ	35.000đ	75.000đ	20.000đ	55.000đ
34.000đ	30.000đ	63.750đ	15.000đ	47.000đ

Hỏi trong các bảng giá sửa ở trên bảng nào đúng, bảng nào sai?

Lời giải

A) $85\%.40000 = 34000 \text{ Đ}$

B) $85\%.35000 = 29750 \text{ S}$

C) $85\%.75000 = 63750 \text{ Đ}$

D) $85\%.20000 = 17000 \text{ S}$

E) $85\%.55000 = 46750 \text{ S}$

Bài 4. a) Tìm 25% của $\left(\frac{51}{320} \cdot 1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10}\right) \cdot 0,1 + 99\%$

b) Tìm 75% của $\left(2,4 \cdot \frac{1}{7} + 80\% \cdot \frac{4}{7} + 20\%\right) \cdot 20\% + \frac{3}{5}$

Lời giải

a) Thu gọn:

$$\left(\frac{51}{320} \cdot 1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10}\right) \cdot 0,1 + 99\% = \left(\frac{51}{320} \cdot \frac{4}{3} - \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{10}\right) \cdot 0,1 + 99\% = 1\% + 99\% = 1.$$

Vậy 25% của 1 = $25\% = \frac{1}{4}$

b) Thu gọn:

$$\left(2,4 \cdot \frac{1}{7} + 80\% \cdot \frac{4}{7} + 20\%\right) \cdot 20\% + \frac{3}{5} = \left(\frac{12}{35} + \frac{16}{35} + 20\%\right) \cdot 20\% + \frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

Vậy 75% của $\frac{4}{5}$ là $\frac{4}{5} \cdot \frac{75}{100} = \frac{3}{5}$.

Bài 5. Tính hợp lý

a) 75% của 16

b) $2\frac{1}{2}$ của $-7\frac{3}{5}$

c) 28% của 50

d) $\frac{51}{68}$ của $1\frac{2}{3}$

e) $\frac{38}{5}$ của $\frac{-5}{19}$

f) 0,4 của 125%

Lời giải

a) 12

b) -19

c) 14

d) $\frac{5}{4}$

e) -2

f) $\frac{1}{2}$

Bài 6. Tìm:

a) 75% của $\frac{\left(217\frac{4}{18}-215\frac{2}{15}\right):5\frac{2}{9}}{(18+3,75):0,25}$

b) $a\%$ của b biết $a=125,25:\frac{1}{4}; b=3,4+21\frac{3}{5}$

Lời giải

a) Trước hết ta tính:

$$\frac{\left(217\frac{4}{18}-215\frac{2}{15}\right):5\frac{2}{9}}{(18+3,75):0,25} = \frac{2\frac{4}{45}:5\frac{2}{9}}{21,75:0,25} = \frac{\frac{94}{45}:\frac{47}{9}}{87} = \frac{\frac{2}{5}}{87} = \frac{2}{435}$$

Vậy 75% của $\frac{2}{435}$ là $\frac{2}{435} \cdot 7,5\% = \frac{2}{435} \cdot \frac{3}{40} = \frac{1}{2900}$

b) $a=125,25:\frac{1}{4}=125,25 \cdot 4=501, b=3,4+21\frac{3}{5}=3,4+21,6=25$

$a\%$ của $b=501\%$ của 25

$=25\%$ của 501 $=501 \cdot 25\% = 125,25$

1.2. Áp dụng bài toán tìm một số biết giá trị một phân số của nó:

Bài 1. a) Số mà $3\frac{1}{7}$ của nó bằng $\frac{55}{14}$ là:

A. $\frac{605}{49}$

B. $1\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{5}{49}$

b) Số mà 75% của nó bằng $-4\frac{5}{7}$ là:

A. $-7\frac{5}{7}$

B. $-\frac{99}{28}$

C. $-6\frac{2}{7}$

D. $6\frac{2}{7}$

Lời giải

a) Chọn B. Vì $\frac{55}{14}:\frac{22}{7}=\frac{5}{4}$

b) Chọn C. Vì $-4\frac{5}{7}:75\%=-6\frac{2}{7}$

Bài 2. Nhân dịp ngày lễ bưu điện giảm cước điện thoại 25% so với giá cước ban đầu chỉ còn 900 đồng/phút. Vậy giá cước ban đầu là:

A. 1100 đ/1 phút

B. 1150 đ/1 phút

C. 1200 đ/1 phút

D. 1400 đ/1 phút

Lời giải

Giá cước ban đầu là: $900 : 75\% = 1200$. Chọn C

Bài 3. Hãy nối bảng giá mới với bảng giá cũ để được các mặt hàng tương ứng, biết rằng cửa hàng giảm giá 10% so với giá cũ

Giá mới	Giá cũ
28 800đ	15 000đ
243 000đ	105 000đ
60 300đ	270 000đ
94 500đ	67 000đ
13 500đ	32 000đ

Lời giải

$$28.800đ \Rightarrow 32.000đ$$

$$243.000đ \Rightarrow 270.000đ$$

$$60.300đ \Rightarrow 67.000đ$$

$$94.500đ \Rightarrow 105.000đ$$

$$13.500đ \Rightarrow 15.000đ$$

Bài 4. Tìm một số biết rằng:

a) 0,7% của nó bằng 3

b) 3,5 của nó bằng 25%

c) $1\frac{1}{2}$ của nó bằng $-5\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{7}$ của nó bằng $-\frac{5}{7}$

Lời giải

$$a) \text{ Số đó là: } 3 : 0,7\% = \frac{3000}{7}$$

$$b) \text{ Số đó là: } 25\% : 3,5 = \frac{1}{14}$$

$$c) \text{ Số đó là: } -5\frac{3}{4} : \frac{3}{2} = \frac{-23}{6}$$

$$d) \text{ Số đó là } -\frac{5}{7} : \frac{3}{7} = \frac{-5}{3}$$

Bài 5. Điền chữ cái tương ứng vào ô trống để được tên một vị anh hùng của dân tộc.

$$-\frac{3}{2} \quad 9 \quad -12 \quad 12 \quad 5 \quad \frac{3}{2} \quad 12 \quad 9 \quad -\frac{16}{7} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{15} \quad \frac{-2}{5}$$

A: số mà $\frac{3}{4}$ của nó là -16

N: số mà $\frac{3}{4}$ của nó là 9

I: số mà 50% của nó là $\frac{3}{4}$

H: số mà 25% của nó là $2\frac{1}{4}$

G: số mà $1\frac{1}{2}$ của nó là $\left(-3\frac{3}{7}\right)$

T: số mà $\frac{2}{5}$ của nó là -0,16

O: số mà 75% của nó là 20%

P: số mà $\frac{1}{3}$ của nó là $-\frac{1}{2}$

Đ: số mà 0,7 của nó là 3,5

Lời giải

A: số mà $\frac{3}{4}$ của nó là -16, số đó là: $-16 : \frac{3}{4} = -12$

I: số mà 50% của nó là $\frac{3}{4}$, số đó là: $\frac{3}{4} : 50\% = \frac{3}{2}$

G: số mà $1\frac{1}{2}$ của nó là $\left(-3\frac{3}{7}\right)$, số đó là: $\left(-3\frac{3}{7}\right) : 1\frac{1}{2} = \frac{-24}{7} : \frac{3}{2} = \frac{-16}{7}$

O: số mà 75% của nó là 20%, số đó là: $20\% : 75\% = \frac{4}{15}$

Đ: số mà 0,7 của nó là 3,5, số đó là: $3,5 : 0,7 = 5$

N: số mà $\frac{3}{4}$ của nó là 9, số đó là: $9 : \frac{3}{4} = 12$

H: số mà 25% của nó là $2\frac{1}{4}$, số đó là: $2\frac{1}{4} : 25\% = \frac{9}{4} : \frac{1}{4} = 9$

T: số mà $\frac{2}{5}$ của nó là -0,16, số đó là: $-0,16 : \frac{2}{5} = \frac{-2}{5}$

P: số mà $\frac{1}{3}$ của nó là $-\frac{1}{2}$, số đó là: $-\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{-3}{2}$

P H A N Đ I N H G I O T

Bài 6. a) Tìm một số biết rằng bớt số đó đi 39 ta được số mới bằng $\frac{2}{5}$ số đã cho

b) Tìm một số biết rằng nếu thêm vào số đó 36 ta được số mới bằng $\frac{7}{3}$ số đã cho

Lời giải

a) 39 ứng với $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ số đã cho, suy ra số đã cho là: $39 : \frac{3}{5} = 65$

b) 36 ứng với $\frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$ (số đã cho). Vậy số đã cho là: $36 : \frac{4}{3} = 27$

Bài 7. a) Tìm A biết rằng $\frac{11}{6}$ của A là $\frac{\left(29\frac{7}{30} - 27\frac{5}{18}\right) : 4\%}{2\frac{2}{3}}$

b) Tìm B biết $\frac{25}{7}$ của B là $\frac{\left(13\frac{3}{5} - 10\frac{3}{14}\right) \cdot \frac{5}{2}}{(31 - 11,25) : 5\frac{5}{6}}$

Lời giải

a) Thu gọn $\frac{\left(29\frac{7}{30} - 27\frac{5}{18}\right) : 4\%}{2\frac{2}{3}} = \frac{\frac{88}{45} : \frac{1}{25}}{\frac{8}{3}} = \frac{55}{3}$, do đó $A = \frac{55}{3} : \frac{11}{6} = \frac{5.2}{1.1} = 10$

b) Thu gọn $\frac{\left(13\frac{3}{5} - 10\frac{3}{14}\right) \cdot \frac{5}{2}}{(31 - 11,25) : 5\frac{5}{6}} = \frac{5}{2}$; suy ra $B = \frac{5}{2} : \frac{25}{7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{25} = \frac{7}{10} = 0,7$

Dạng 2 : Toán thực tế vận dụng dạng toán tìm giá trị phân số của một số cho trước:

I. Phương pháp giải

- Sử dụng quy tắc tìm $\frac{m}{n}$ của một số b cho trước, ta tính $b \cdot \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$) để làm các bài toán thực tế từ đó học sinh biết vận dụng kiến thức để giải quyết các tình huống trong thực tế như tính toán khi mua hàng có chương trình giảm giá tại các siêu thị,qua đó học sinh thấy được ý nghĩa của việc học toán từ đó yêu thích môn toán hơn

II. Bài toán

Bài 1. Một lớp có 48 học sinh, 50% số học sinh của lớp đạt loại khá, số học sinh giỏi bằng $\frac{5}{6}$ số học sinh khá, còn lại là học sinh trung bình và yếu. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh trung bình yếu.

Lời giải

Số học sinh khá: $48.50\% = 24$ (học sinh)

Số học sinh giỏi: $24 \cdot \frac{5}{6} = 20$ (học sinh)

Số học sinh trung bình và yếu: $48 - (24 + 20) = 4$ (học sinh)

Đáp số: 4 học sinh

Bài 2. Một cuộn dây dài 150m. Lần thứ nhất người bán hàng cắt đi $\frac{8}{15}$ cuộn dây, lần thứ 2 cắt tiếp $\frac{5}{14}$ phần còn lại. Hỏi sau 2 lần cắt thì phần dây còn lại bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1:

Lần thứ nhất cắt đi: $150 \cdot \frac{8}{15} = 80(m)$

Số dây còn lại sau lần thứ nhất: $150 - 80 = 70(m)$

Lần thứ hai cắt đi: $70 \cdot \frac{5}{14} = 25(m)$

Sau 2 lần cắt thì còn lại: $150 - (80 + 25) = 45(m)$

Đáp số: $45(m)$

Cách 2:

Phần dây còn lại sau lần cắt thứ nhất: $1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$ (cuộn dây)

Phần dây cắt đi lần 2: $\frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{6}$ (cuộn dây)

Phần dây còn lại bằng: $1 - \left(\frac{8}{15} + \frac{1}{6} \right) = \frac{3}{10}$ (cuộn dây)

Vậy phần dây còn lại dài: $150 \cdot \frac{3}{10} = 45(m)$

Đáp số: $45(m)$

Bài 3. Một trường học có 1320 học sinh, trong đó tổng số học sinh khối 6 và 7 bằng $\frac{25}{44}$ tổng số học sinh toàn trường. Số học sinh khối 8 chiếm 25%, còn lại là học sinh khối 9. Hỏi mỗi khối có bao nhiêu học sinh? Biết rằng tổng số học sinh khối 6 và khối 8 gấp hai lần số học sinh khối 7.

Lời giải

Tổng số học sinh khối 6 và 7 là:

$$1320 \cdot \frac{25}{44} = 750 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh khối 8 là:

$$1320 \cdot 25\% = 330 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh khối 9 là:

$$1320 - (750 + 330) = 240 \text{ (học sinh)}$$

Vì số học sinh khối 6 và 8 gấp 2 lần số học sinh khối 7 nên số học sinh khối 7 chiếm $\frac{1}{3}$ tổng số học sinh khối 6, 7 và 8. Vậy số học sinh khối 7 là:

$$(750 + 330) \cdot \frac{1}{3} = 360 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh khối 6 là:

$$750 - 360 = 390 \text{ (học sinh)}$$

Đáp số: Khối 6: 390 học sinh

Khối 7: 360 học sinh

Khối 8: 330 học sinh

Khối 9: 240 học sinh

Bài 4. Một người công nhân tháng giêng sản xuất được 250 dụng cụ, sang tháng hai vượt tháng giêng 30%, sang tháng ba lại vượt tháng hai 20%. Hỏi công nhân đó đã sản xuất được bao nhiêu dụng cụ trong 3 tháng.

Lời giải

Tháng 2 sản xuất được:

$$250 + 250 \cdot 30\% = 325 \text{ (dụng cụ)}$$

Tháng 3 sản xuất được:

$$325 + 20\% \cdot 325 = 390 \text{ (dụng cụ)}$$

Cả 3 tháng sản xuất được:

$$250 + 325 + 390 = 965 \text{ (dụng cụ)}$$

Đáp số: 965 dụng cụ

Bài 5. Ở một trường học có 900 học sinh tham gia học các lớp chuyên, trong đó số học sinh chuyên toán chiếm $\frac{9}{2}$ tổng số, số học sinh học chuyên văn chiếm 20%, số học sinh chuyên Anh bằng $\frac{3}{2}$ số học sinh chuyên văn, còn lại là học sinh học chuyên Pháp. Tính số học sinh học chuyên mỗi loại.

Lời giải

Số học sinh chuyên Toán là:

$$\frac{2}{9} \cdot 900 = 200 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh chuyên Văn là:

$$900 \cdot 20\% = 180 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh chuyên Anh là:

$$180 \cdot \frac{3}{2} = 270 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh chuyên Pháp là:

$$900 - (200 + 180 + 270) = 250 \text{ (học sinh)}$$

Đáp số: Toán: 200 học sinh

Văn: 180 học sinh

Anh: 270 học sinh

Pháp: 250 học sinh

Bài 6. a) Chiều dài của một hình chữ nhật tăng 20%, chiều rộng giảm 20%. Hỏi diện tích hình chữ nhật đó thay đổi như thế nào?

b) Cạnh của một hình vuông tăng thêm $\frac{1}{3}$ lần, vậy diện tích hình vuông thay đổi như thế nào?

c) Cạnh của một hình lập phương tăng thêm $\frac{1}{4}$ lần, thì thể tích hình lập phương thay đổi như thế nào?

Lời giải

a) Gọi chiều dài và chiều rộng cũ lần lượt là a và b ($a, b > 0$)

$\Rightarrow$ Chiều dài và chiều rộng mới lần lượt là: $120\% \cdot a$ và $80\% \cdot b$

$\Rightarrow$ Diện tích mới là $120\% \cdot a \cdot 80\% \cdot b = \frac{24}{25} \cdot a \cdot b = 96\% \cdot ab$

Vậy diện tích mới giảm 4% so với diện tích cũ.

b) Tăng $\frac{7}{9}$ lần so với diện tích cũ.

c) Tăng $\frac{61}{64}$ so với thể tích cũ.

Bài 7. Hiện nay tổng số tuổi của 3 anh em là 54 tuổi, biết rằng tuổi người em út bằng $\frac{5}{13}$ tổng số tuổi của

2 anh cộng lại, tuổi người anh thứ hai hơn người em út 20% số tuổi người em út. Tính số tuổi của mỗi người.

Lời giải

Tuổi của người em út bằng:

$$\frac{5}{13+5} = \frac{5}{18} \text{ (tổng số tuổi ba anh em)}$$

Tuổi của anh thứ hai là:

$$54 \cdot \frac{5}{18} = 15 \text{ (tuổi)}$$

Tuổi của anh trai cả là:

$$54 - 15 - 18 = 21 \text{ (Tổng số tuổi ba anh em)}$$

Đáp án: 21 tuổi, 18 tuổi, 15 tuổi

Bài 8. Bà Lan gửi tiền tiết kiệm và gửi lãi suất 0,7% một tháng. Lúc đầu bà gửi 8 triệu đồng, hai tháng sau bà lại tiếp tục gửi thêm 2 triệu đồng. Hỏi rằng sau 3 tháng kể từ lần gửi đầu tiên bà có được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi (chú ý: tiền lãi của tháng trước được nhập thành vốn của tháng sau).

Lời giải

Số tiền bà có sau 1 tháng:

$$8.000.000 + 8.000.000 \cdot 0,7\% = 8.056.000 \text{ (đồng)}$$

Số tiền bà có sau hai tháng:

$$8.056.000 + 8.056.000 \cdot 0,7\% = 8.112.392 \text{ (đồng)}$$

Số tiền bà có sau 3 tháng (đã gửi thêm 2 triệu) là:

$$(8.112.392 + 2.000.000) + (8.112.392 + 2.000.000) \cdot 0,7\% = 10.183.178,744 \text{ (đồng)}$$

Đáp số: 10.183.178,744 đồng

Bài 9. Với cùng một khối lượng gạo và bột mì thì lượng đạm trong bột mì bằng 180% lượng đạm trong gạo, lượng bột hay đường trong bột mì bằng 68,75% lượng bột hay đường trong gạo. Biết lượng đạm trong gạo là 5%, lượng bột hay đường trong gạo là 80%. Hỏi trong 1 tạ bột mì thì có bao nhiêu đạm, bao nhiêu bột hay đường.

Lời giải

Lượng đạm trong bột mì chiếm:

$$5\% \cdot 180\% = 9\%$$

Lượng bột hay đường trong bột mì chiếm:

$$80\%.68,75\% = 55\%$$

Vậy 1 tạ bột mì chứa lượng đạm là:

$$9\%.100 = 9 \text{ (kg)}$$

1 tạ bột mì chứa lượng bột hay đường là:

$$100.55\% = 55 \text{ (kg)}$$

Đáp số: 9 kg, 55 kg

Bài 10. Một cửa hàng bán 150 mét vải trong ba ngày. Ngày thứ nhất bán $\frac{3}{5}$ tổng số mét vải. Ngày thứ hai bán 60% số mét vải còn lại (số mét vải còn lại bao gồm: số mét vải bán trong ngày thứ hai, số mét vải bán trong ngày thứ ba). Tính số mét vải cửa hàng bán trong ngày thứ ba?

Lời giải

Ngày thứ nhất bán được số mét vải là: $150 \cdot \frac{3}{5} = 90$ (mét)

Ngày thứ hai bán được số mét vải là: $(150 - 90) \cdot 60\% = 60 \cdot \frac{3}{5} = 36$ (mét)

Ngày thứ ba bán được số mét vải là: $150 - 90 - 36 = 24$ (mét)

Vậy ngày thứ ba cửa hàng bán được 24 mét vải.

Bài 11. Tại một cửa hàng giá niêm yết của một con gấu bông là 150 000 đồng, một cuốn sách Harry Potter là 215 000 đồng. Nhân dịp Quốc tế Thiếu nhi 1 tháng 6 cửa hàng giảm cho một con gấu bông là 20% và một cuốn sách Harry Potter là 30%. Hỏi với số tiền tiết kiệm được là 280 000 đồng thì bạn An mua được một con gấu bông và một cuốn sách Harry Potter đó không? Vì sao?

Lời giải

Số tiền một con gấu bông sau khi giảm giá là:

$$150\,000 - 150\,000.20\% = 150\,000 - 30\,000 = 120\,000 \text{ (đồng)}$$

Số tiền một cuốn sách Harry Potter sau khi giảm giá là:

$$215\,000 - 215\,000.30\% = 215\,000 - 64\,500 = 150\,500 \text{ (đồng)}$$

Tổng số tiền của một con gấu bông và một cuốn sách Harry Potter sau khi giảm giá là:

$$120\,000 + 150\,500 = 270\,500 \text{ (đồng)}$$

Vậy với số tiền tiết kiệm là 280 000 đồng thì bạn An mua được một con gấu bông và một cuốn sách Harry Potter.

Bài 12. Trong tháng vừa rồi, mẹ bạn Trân dự định dùng 2 triệu đồng chi trả các khoản tiền điện, tiền nước và truyền hình cáp. Biết tiền điện chiếm 70% tổng số tiền, tiền nước chiếm $\frac{11}{15}$ số tiền còn lại.

- a) Tính số tiền điện, tiền nước phải trả.
b) Với tổng số tiền trên, mẹ bạn Trân có đủ trả tiền truyền hình cáp là 100 000 đồng không? Vì sao?

Lời giải

a) Số tiền điện phải trả là: $2\,000\,000 \times 70\% = 1\,400\,000$ (đồng)

Số tiền còn lại sau khi trả tiền điện là: $2\,000\,000 - 1\,400\,000 = 600\,000$ (đồng)

Số tiền nước phải trả là: $600\,000 \times \frac{11}{15} = 440\,000$ (đồng)

b) Số tiền còn lại sau khi trả tiền điện, nước là: $2\,000\,000 - 1\,400\,000 - 440\,000 = 160\,000$ (đồng)

Vậy mẹ bạn Trân vẫn đủ để trả tiền truyền hình cáp là 100 000 đồng và còn thừa 60 000 đồng.

Bài 13. Mẹ Lan muốn bán $\frac{1}{4}$ đàn gà (đàn gà có 40 con với giá 80 000 đồng/1 con) để mua một nồi cơm điện. Biết chiếc nồi cơm điện có giá gốc là 900 000 đồng và đang được giảm 20%. Hỏi mẹ Lan có đủ tiền mua nồi cơm điện hay không? Giải thích.

Lời giải

Số con gà mẹ Lan muốn bán là: $40 \times \frac{1}{4} = 10$ (con)

Số tiền mẹ Lan bán 10 con gà là: $80\,000 \times 10 = 800\,000$ (đồng)

Nồi cơm điện giảm số tiền là: $900\,000 \times 20\% = 180\,000$ (đồng)

Giá của nồi cơm điện sau khi giảm giá là: $900\,000 - 180\,000 = 720\,000$ (đồng)

Vậy số tiền mẹ Lan bán gà mua được nồi cơm điện và còn thừa 80 000 đồng.

Bài 14. Nhân dịp Quốc tế Thiếu nhi 1 tháng 6, một cửa hàng văn phòng phẩm thực hiện chương trình giảm giá theo hai đợt. Đợt một giảm 15% giá ban đầu và đợt hai giảm 20% trên giá đã giảm của đợt một. Bạn Thành đến cửa hàng đúng lúc cửa hàng đang giảm giá đợt hai. Bạn ấy mang theo 100 000 đồng và định mua bút bi với giá ban đầu là 12 500 đồng một bút. Hỏi bạn Thành có thể mua nhiều nhất bao nhiêu bút bi?

Lời giải

Giá một cây bút bi sau hai lần giảm giá là: $85\% \cdot 12500 \cdot 80\% = 8500$ (đồng)

Gọi số cây bút bi Thành có thể mua được là x (cây).

$$8500x < 100000 \Rightarrow x < 11,76$$

Vậy Thành mua được nhiều nhất là 11 cây.

Bài 15. Minh luyện tập để chuẩn bị cuộc thi Hội khỏe Phù Đổng. Thời gian đầu tập luyện, Minh chạy đều một vòng sân hết 150 giây.

a) Hỏi bạn Minh mất hết bao nhiêu giây để chạy hết 8 vòng?

b) Sau thời gian tập luyện, Minh đã tiến bộ hơn trước nên thời gian chạy đều một vòng sân giảm 20% so với thời gian ban đầu. Hỏi nếu Minh chạy trong 18 phút thì Minh chạy được bao nhiêu vòng?

Lời giải

a) Số giây bạn Minh chạy hết 8 vòng sân là: $150.8 = 1200$

b) Thời gian chạy 1 vòng sân, khi thời gian giảm 20% so với ban đầu là:

$$150.(100\% - 20\%) = 150.80\% = 120$$

Đổi 18 phút = 1080 giây

Trong 18 phút Minh chạy được số vòng là:

$$1080 : 120 = 9$$

Đáp số: a) 1200 giây

b) 9 vòng

Dạng 3: Toán thực tế vận dụng dạng toán tìm một số biết giá trị một phân số của nó:

I. Phương pháp giải

* Vận dụng quy tắc muốn tìm một số biết $\frac{m}{n}$ của nó là a ta tính $a : \frac{m}{n} (m, n \in N^*)$

* Chú ý:

+) Nếu $\frac{m}{n}$ của b là a thì $a = \frac{m}{n}.b (m, n \in N^*)$

+) Nếu $a = \frac{m}{n}$ của b thì $a = \frac{m}{m+n}$ của tổng $(a+b)$ và $a = \frac{m}{m-n}$ của hiệu $(a-b)$

II. Bài toán

Bài 1. Một bà đi chợ bán trứng, lần đầu bà bán được $\frac{2}{5}$ số trứng, lần thứ hai bà bán được $\frac{2}{3}$ số trứng còn lại, cuối cùng còn lại 10 quả. Hỏi số trứng ban đầu bà đem đi bán là bao nhiêu quả?

Lời giải

Số trứng còn lại sau lần bán thứ nhất:

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{ (số trứng ban đầu)}$$

Số trứng bán được ở lần bán thứ hai:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \text{ (số trứng ban đầu)}$$

10 quả trứng ứng với số phần:

$$1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{5} \text{ (số trứng ban đầu)}$$

Vậy ban đầu có:

$$10 : \frac{1}{5} = 50 \text{ (quả trứng).}$$

Đáp số: 50 quả trứng

Bài 2. Ban đầu trong thư viện có số sách khoa học tự nhiên bằng $\frac{4}{5}$ số sách khoa học xã hội, vì thư viện mới cho mượn 40 quyển sách khoa học tự nhiên nên số sách khoa học tự nhiên bằng $\frac{4}{15}$ số sách khoa học xã hội. Hỏi ban đầu thư viện có bao nhiêu quyển sách mỗi loại.

Lời giải

40 quyển sách khoa học tự nhiên bằng:

$$\frac{4}{5} - \frac{4}{15} = \frac{8}{15} \text{ (số sách KHXH)}$$

Số sách KHXH là:

$$40 : \frac{8}{15} = 75 \text{ (quyển)}$$

Số sách KHTN ban đầu là:

$$75 \cdot \frac{4}{5} = 60 \text{ (quyển)}$$

Đáp số: KHTN: 60 quyển; KHXH: 75 quyển

Bài 3. Hiện nay tuổi cháu bằng $\frac{5}{14}$ tuổi bà, cách đây 10 năm tuổi bà gấp 4 lần tuổi cháu. Tính tuổi bà và tuổi cháu hiện nay.

Lời giải

Chú ý: hiệu số tuổi của bà và cháu không đổi.

Hiện nay tuổi cháu bằng $\frac{5}{14-5} = \frac{5}{9}$ (hiệu tuổi bà và cháu)

Cách đây 10 năm tuổi cháu bằng $\frac{1}{4}$ tuổi bà hay tuổi cháu bằng $\frac{1}{3}$ hiệu tuổi bà và cháu, do đó 10 năm ứng với:

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \text{ (hiệu tuổi bà và cháu).}$$

Hiệu tuổi bà và cháu là:

$$10 : \frac{2}{9} = 45 \text{ (tuổi)}$$

Tuổi cháu hiện nay là:

$$45 : \frac{5}{9} = 25 \text{ (tuổi)}$$

Tuổi bà hiện nay là:

$$25 + 45 = 70 \text{ (tuổi)}$$

Đáp số: Cháu: 25 tuổi, Bà: 70 tuổi

Bài 4. Tìm 2 số biết rằng 70% số lớn hơn 85% số bé là 1 đơn vị và 68% số lớn hơn 42,5% số bé là 17 đơn vị.

Lời giải

Vì 68% số lớn hơn 42,5% số bé là 17 đơn vị nên 136% số lớn hơn 85% là 34 đơn vị, mà 70% số lớn hơn 85% số bé là 1 đơn vị, nên suy ra:

$$136\% - 70\% = 66\% \text{ số lớn là bằng } 34 - 1 = 33 \text{ đơn vị}$$

Vậy số lớn bằng:

$$33 : 66\% = 50$$

$$85\% \text{ số bé bằng } (70\% \text{ của } 50) - 1 = 50 \cdot 70\% - 1 = 34$$

Do đó số bé bằng:

$$34 : 85\% = 40$$

Bài 5. Một cái sân chơi hình chữ nhật, biết 40% chiều rộng bằng $\frac{2}{9}$ chiều dài, và chiều dài của sân là 90m. Tính chu vi, diện tích của cái sân đó.

Lời giải

$\frac{2}{9}$ chiều dài sân là:

$$90 \cdot \frac{2}{9} = 30(m)$$

Chiều rộng sân là:

$$20 : 40\% = 50(m)$$

Chu vi sân là:

$$(90 + 50) \cdot 2 = 280(m)$$

Diện tích sân là:

$$90 \cdot 50 = 4500(m^2)$$

Đáp số: $280m; 4500m^2$

Bài 6. Lượng nước trong cỏ tươi 60% , trong cỏ khô là 15% . Hỏi một tấn cỏ tươi có bao nhiêu cỏ khô?

Lời giải

Lượng cỏ nguyên chất trong cỏ tươi chiếm:

$$100\% - 60\% = 40\%$$

Lượng cỏ nguyên chất trong cỏ khô chiếm:

$$100\% - 15\% = 85\%$$

1 tấn cỏ tươi cho số cỏ nguyên chất là:

$$1000 \cdot 40\% = 400 (kg)$$

Vậy 1 tấn cỏ tươi cho số kg cỏ khô là:

$$400 \cdot 85\% = \frac{8000}{17} (kg)$$

Đáp số: $\frac{8000}{17} \text{ kg} = \frac{8}{17} \text{ tấn}$

Bài 7. Tại một phân xưởng lao động, đầu năm số công nhân bậc 2 bằng $\frac{2}{7}$ số công nhân bậc 1. Đến cuối năm có 5 công nhân bậc 1 được lên thành bậc 2 nên số công nhân bậc 2 bằng một nửa số công nhân bậc 1. Tính tổng số công nhân bậc 1 và bậc 2 ở phân xưởng đó.

Lời giải

Đầu năm số công nhân bậc hai chiếm $\frac{2}{2+7} = \frac{2}{9}$ (tổng số công nhân bậc 1, bậc 2)

Cuối năm số công nhân bậc hai chiếm $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ (tổng số công nhân bậc 1, bậc 2)

5 công nhân ứng với $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$ (tổng số công nhân bậc 1, bậc 2)

Tổng số công nhân bậc 1 và bậc 2 ở phân xưởng đó là: $5 : \frac{1}{9} = 45$ (công nhân)

Đáp số: 45 công nhân

Bài 8. Số sách ở ngăn A bằng $\frac{2}{5}$ tổng số sách ở ngăn A và B . Sau đó người ta bổ sung vào ngăn A thêm 3 quyển sách nữa thì số sách ở ngăn A tổng số sách ở 2 ngăn A và B . Tính số sách ban đầu ở mỗi ngăn.

Lời giải

(chú ý: số sách ngăn B không đổi)

Ban đầu số sách ngăn A bằng $\frac{2}{5-2} = \frac{2}{3}$ (số sách ngăn B)

Sau khi bổ sung 3 quyển thì số sách ngăn A bằng $\frac{5}{11-5} = \frac{5}{6}$ (số sách ngăn B)

Vậy 3 quyển sách ứng với: $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ (số sách ngăn B)

Số sách ngăn B là: $3 : \frac{1}{6} = 18$ (quyển)

Số sách ban đầu ngăn A là: $\frac{2}{3} \cdot 18 = 12$ (quyển)

Đáp số: 12 quyển; 18 quyển.

Bài 9. Ba đội xe phải chở một số bao xi măng cho công trường xây dựng, đội thứ nhất chở được $\frac{2}{5}$ tổng số bao, đội thứ hai chở được 45% số bao còn lại, đội thứ ba chở được 140 bao, như vậy so với quy định cả 3 đội đã chở nhiều hơn 8 bao. Hỏi 3 đội chở được bao nhiêu bao xi măng?

Lời giải

Số bao xi măng đội thứ hai chở được chiếm:

$$45\% \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 27\% \text{ (tổng số bao)}$$

Theo quy định số bao xi măng đội thứ ba phải chở chiếm:

$$1 - \frac{2}{5} - 27\% = 33\% \text{ (tổng số bao)}$$

Mà theo quy định thì đội ba phải chở là:

$$140 - 8 = 132 \text{ (bao)}$$

Vậy tổng số bao cả 3 đội phải chở theo quy định là:

$$132 : 33\% = 400 \text{ (bao)}$$

Vậy cả ba đội đã chở được:

$$400 + 8 = 408 \text{ (bao)}$$

Đáp số: 408 bao.

Bài 10. Có một đoạn đường cần phải sửa. Nếu cả 2 người cùng làm thì hết 6 ngày sửa xong, nếu làm một mình người thứ nhất thì sửa xong trong 14 ngày. Hỏi đoạn đường đó dài bao nhiêu mét? Biết rằng mỗi ngày người thứ hai sửa nhanh hơn người thứ nhất là $1,5m$.

Lời giải

Một ngày cả 2 người sửa được $\frac{1}{6}$ quãng đường.

Một ngày người thứ nhất sửa được: $\frac{1}{14}$ quãng đường

Một ngày thứ hai sửa được: $\frac{1}{6} - \frac{1}{14} = \frac{2}{21}$ (quãng đường)

Người thứ hai trong một ngày sửa được nhiều hơn người thứ nhất là:

$$\frac{2}{21} - \frac{1}{14} = \frac{1}{42} \text{ (quãng đường)}$$

Đoạn đường đó dài là: $1,5 : \frac{1}{42} = 63(m)$

Đáp số: $63m$

Bài 11. Một công nhân đánh máy chữ phải đánh một quyển sách, ngày đầu người đó đánh được $\frac{1}{4}$ quyển sách và 15 trang, ngày thứ hai người đó đánh được $\frac{5}{9}$ số trang còn lại và 20 trang. Ngày thứ 3 người đó đánh được 75% số trang còn lại và 20 trang cuối. Hỏi quyển sách đó dày bao nhiêu trang?

Lời giải

20 trang ứng với $100\% - 75\% = 25\%$ (số trang của ngày thứ 3)

Ngày thứ 3 người đó đánh được:

$$20 : 25\% = 80 \text{ (trang)}$$

Suy ra, $80 + 20 = 100$ (trang) ứng với:

$$1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \text{ (số trang còn lại sau ngày 1)}$$

Số trang còn lại sau ngày 1 là:

$$100 : \frac{4}{9} = 225 \text{ (trang)}$$

Do đó, $225 + 15 = 240$ (trang) ứng với:

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ (quyển sách)}$$

Vậy quyển sách đó dày là:

$$240 : \frac{3}{4} = 320 \text{ (trang)}$$

Đáp số: 320 trang

Bài 12. Trong một kỳ thi tốt nghiệp THPT, tổng số điểm 6 môn thi của 4 học sinh như sau: điểm của người thứ nhất bằng $\frac{14}{51}$ tổng số điểm của 3 người còn lại; điểm của người thứ hai bằng $\frac{17}{48}$ tổng số điểm của 3 người còn lại; điểm của người thứ ba bằng $\frac{19}{46}$ tổng số điểm của ba người còn lại; người thứ tư được 45 điểm. Hỏi mỗi người được bao nhiêu điểm?

Lời giải

Điểm người thứ nhất bằng:

$$\frac{14}{14+51} = \frac{14}{65} \text{ (tổng điểm của 4 bạn học sinh)}$$

Điểm của người thứ hai bằng:

$$\frac{17}{48+17} = \frac{17}{65} \text{ (tổng số điểm của 4 bạn)}$$

Điểm của người thứ ba bằng:

$$\frac{19}{46+19} = \frac{19}{65} \text{ (tổng số điểm của 4 bạn)}$$

Vậy tổng điểm của người thứ 4 bằng:

$$1 - \left(\frac{14}{65} + \frac{17}{65} + \frac{19}{65} \right) = \frac{15}{65} = \frac{3}{13} \text{ (tổng số điểm 4 bạn)}$$

Vậy tổng số điểm của 4 bạn đó là:

$$45 : \frac{3}{13} = 195 \text{ (điểm)}$$

Người thứ nhất đạt:

$$\frac{14}{65} \cdot 195 = 42 \text{ (điểm)}$$

Người thứ hai đạt:

$$\frac{17}{65} \cdot 195 = 51 \text{ (điểm)}$$

Người thứ ba đạt:

$$\frac{19}{65} \cdot 195 = 57 \text{ (điểm)}$$

Đáp số: 42 điểm; 51 điểm; 57 điểm; 45 điểm.

PHẦN III. CÁC BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG:

Bài 1. (Đề thi HSG huyện Ba Vì 2018-2019)

Một người mang cam đi chợ bán. Người thứ nhất mua $\frac{1}{6}$ số cam và 5 quả. Người thứ hai mua 20% số cam còn lại và thêm 12 quả. Người thứ ba mua 25% số cam còn lại và thêm 9 quả. Người thứ tư mua $\frac{1}{3}$ số cam còn lại và 12 quả thì vừa hết. Tính số cam người đó mang đi bán ?

Lời giải

Phân số chỉ 12 quả cam là $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (số cam còn lại sau khi người thứ ba mua)

Số cam còn lại sau khi người thứ ba mua: $12 : \frac{2}{3} = 18$ (quả)

Phân số chỉ $18 + 9 = 27$ quả cam là: $1 - 25\% = \frac{3}{4}$ (số cam còn lại sau khi người thứ tư mua)

Số cam sau khi người thứ hai mua: $27 : \frac{3}{4} = 36$ (quả)

Phân số chỉ 48 quả cam: $1 - 20\% = \frac{4}{5}$ (số cam còn lại sau khi người thứ nhất mua)

Số cam sau khi người thứ nhất mua: $48 : \frac{4}{5} = 60$ (quả)

Phân số chỉ 65 quả cam là: $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ (số cam mang đi bán)

Số cam người đó mang đi bán: $65 : \frac{5}{6} = 78$ (quả)

Bài 2. (Đề thi HSG 6_ Quận Hai Bà Trưng 1998 - 1999)

Một xí nghiệp làm một số dụng cụ, giao cho 3 phân xưởng thực hiện. Số dụng cụ phân xưởng I làm bằng 28% tổng số. Số dụng cụ phân xưởng II làm gấp rưỡi số dụng cụ phân xưởng I. Phân xưởng III làm ít hơn phân xưởng II là 72 chiếc. Tính số dụng cụ mỗi phân xưởng đã làm.

Lời giải

So với tổng số, số dụng cụ phân xưởng 2 làm chiếm số phần là:

So với tổng số, số dụng cụ phân xưởng 3 làm chiếm số phần là:

So với tổng số, 72 chiếc chiếm số phần là:

Tổng số sản phẩm cả ba phân xưởng làm là: $72 : 12\% = 600$ (dụng cụ)

Số sản phẩm phân xưởng 1 làm là: $600 \cdot 28\% = 168$ (dụng cụ)

Số sản phẩm phân xưởng 2 làm là: $600 \cdot 42\% = 252$ (dụng cụ)

Số sản phẩm phân xưởng 3 làm là: $252 - 72 = 180$ (dụng cụ)

Bài 3. (Đề thi HSG 6_ Thị xã Sơn Tây 2001 - 2002)

Bạn Thu đọc một cuốn sách trong 4 ngày. Ngày thứ nhất Thu đọc được $\frac{1}{5}$ cuốn sách và 10 trang. Ngày thứ 2, thu đọc được $\frac{4}{9}$ số trang còn lại và 10 trang. Ngày thứ ba, Thu đọc được $\frac{2}{7}$ số trang còn lại và 10 trang. Ngày thứ tư, Thu đọc được $\frac{8}{9}$ số trang còn lại và 10 trang cuối cùng. Hỏi cuốn sách Thu đã đọc có bao nhiêu trang?

Lời giải

10 trang là $\left(1 - \frac{8}{9}\right) = \frac{1}{9}$ số trang đọc trong ngày thứ tư.

Vậy số trang còn lại sau ngày thứ ba là: $10 : \frac{1}{9} = 90$ (trang)

$(90+10)$ trang là $\left(1-\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{7}$ số trang còn lại sau ngày thứ hai.

Vậy số trang còn lại sau ngày thứ hai là: $100:\frac{5}{7}=140$ (trang)

$(140+10)$ trang là $\left(1-\frac{4}{9}\right)=\frac{5}{9}$ số trang còn lại sau ngày thứ nhất.

Vậy số trang còn lại sau ngày thứ nhất là: $150:\frac{5}{9}=270$ (trang)

$(270+10)$ trang là $\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}$ số trang của cuốn sách.

Vậy số trang cả cuốn sách Thu đã đọc là: $280:\frac{4}{5}=350$ (trang)

Bài 4. (Đề thi HSG 6 huyện Hoàng Hóa 2013 - 2014)

Hai ô tô cùng đi từ A đến B . Ô tô thứ nhất xuất phát từ A lúc 8 giờ sáng và đến B lúc 2 giờ chiều. Ô tô thứ hai xuất phát từ A lúc 9 giờ sáng và đến B sớm hơn xe thứ nhất nửa giờ. Hỏi ô tô thứ hai đuổi kịp ô tô thứ nhất ở cách A bao nhiêu ki - lô- mét nếu vận tốc của nó lớn hơn vận tốc của ô tô thứ nhất là 20km/h.

Lời giải

Thời gian xe thứ nhất đi hết quãng đường AB là : $14h-8h=6h$.

Thời gian xe thứ hai đi hết quãng đường AB là : $(14h-0,5h)-9h=\frac{9}{2}h$

Một giờ xe thứ nhất đi được : $\frac{1}{6}$ (quãng đường AB).

Một giờ xe thứ hai đi được : $\frac{2}{9}$ (quãng đường AB).

Phân số chỉ 20km là : $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$ (quãng đường AB)

Vậy quãng đường AB dài : $20:\frac{1}{18}=360$ (km)

Vận tốc xe thứ nhất là : $360.\frac{1}{6}=60$ (km/h)

Khi hai xe cùng bắt đầu đi chúng cách nhau 60km (vì xe thứ nhất đi trước xe thứ hai 1 giờ). Do đó, chúng gặp nhau (kể từ khi xe thứ hai đi) sau : $60:20=3$ (h)

Nơi gặp nhau cách A là: $60 + 60.2 = 240$ km.

Bài 5. (Đề thi HSG 6 huyện Thanh Oai 2013 - 2014)

Giáo viên chủ nhiệm lớp 6A điều học sinh đi lao động, theo kế hoạch ban đầu số học sinh nữ bằng 25% số học sinh nam, sau đó có một học sinh nữ có lý do xin vắng nên giáo viên thay bằng một bạn nam để số lượng không thay đổi, vì vậy số học sinh nữ bằng 20% số học sinh nam. Tìm số học sinh nam, nữ trong buổi lao động?

Lời giải

Ta thấy theo kế hoạch số học sinh nữ bằng 25% số học sinh nam tức là số học sinh nữ bằng $\frac{1}{4}$ số học sinh nam hay số học sinh nữ bằng $\frac{1}{5}$ tổng số học sinh. Lý luận tương tự ta có thực tế số học sinh nữ bằng $\frac{1}{6}$ tổng số học sinh

1 học sinh chiếm số phần là: $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ (Tổng số học sinh đi lao động)

Số học sinh đi lao động là: $1 : \frac{1}{30} = 30$ (em)

Vậy: Số học sinh nữ là: $\frac{1}{6}.30 = 5$ (em)

Số học sinh nam là: $30 - 5 = 25$ (em).

Bài 6. (Đề thi HSG 6 huyện Hoàng Hóa 2013 - 2014)

Hiện nay tuổi mẹ bằng $2\frac{1}{2}$ tuổi con. Bốn năm trước tuổi mẹ bằng 3 lần tuổi con. Tính tuổi mẹ, tuổi con hiện nay ?

Lời giải

Bốn năm trước mẹ hơn con 2 lần tuổi con lúc đó. Hiện nay tuổi mẹ hơn tuổi con $1\frac{1}{2}$ lần tuổi con hiện nay. Hiệu giữa tuổi mẹ và tuổi con không đổi nên ta có 2 lần tuổi con cách đây 4 năm $= 1\frac{1}{2}$ tuổi con hiện nay.

Hay $2 (\text{tuổi con hiện nay} - 4) = 1\frac{1}{2}$ lần tuổi con hiện nay

tức là 2 lần tuổi con hiện nay $-8 = 1\frac{1}{2}$ lần tuổi con hiện nay

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \text{ lần tuổi con hiện nay} = 8$$

$\Rightarrow$ tuổi con hiện nay là 16 tuổi

Tuổi mẹ hiện nay là $16.2\frac{1}{2} = 40$ tuổi.

Bài 7. (HSG THCS Nguyễn Khuyến 2018-2019)

Ba máy bơm cùng bơm vào một bể lớn, nếu dùng cả máy một và máy hai thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy, dùng máy hai và máy ba thì sau 1 giờ 30 phút bể sẽ đầy còn nếu dùng máy một và máy ba thì bể sẽ đầy sau 2 giờ 24 phút. Hỏi nếu mỗi máy bơm được dùng một mình thì bể sẽ đầy sau bao lâu ?

Lời giải

Máy 1 và máy 2 bơm 1 giờ 20 phút hay $\frac{4}{3}$ giờ đầy bể nên 1 giờ máy 1 và 2 bơm được $\frac{3}{4}$ bể

Máy 2 và máy 3 bơm 1 giờ 30 phút hay $\frac{3}{2}$ giờ đầy bể nên 1 giờ máy 2 và 3 bơm được $\frac{2}{3}$ bể

Máy 1 và máy 3 bơm 2 giờ 24 phút hay $\frac{12}{5}$ giờ đầy bể nên 1 giờ máy 1 và 3 bơm được $\frac{5}{12}$ bể.

$$\Rightarrow \text{Một giờ cả ba máy bơm} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{12} \right) : 2 = \frac{11}{12} \text{ (bể)}$$

Một giờ:

Máy 3 bơm được: $\frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$ bể nên máy 3 bơm 1 mình 6 giờ đầy bể

Máy 1 bơm được: $\frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ bể nên máy 1 bơm 1 mình 4 giờ đầy bể

Bài 8. (Đề thi HSG 6 huyện Hoằng Hóa 2013 - 2014)

Tìm ba số có tổng bằng 210, biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{10}$ số thứ hai và bằng $\frac{2}{3}$ số thứ ba.

Lời giải

Số thứ nhất bằng $\frac{9}{11} : \frac{6}{7} = \frac{21}{22}$ (Số thứ hai)

Số thứ ba bằng $\frac{9}{11} : \frac{2}{3} = \frac{27}{22}$ (Số thứ hai)

Tổng của ba số bằng $\frac{21+22+27}{22}$ (số thứ hai) = $\frac{70}{22}$ (số thứ hai)

Số thứ hai là : $210 : \frac{70}{22} = 66$

Số thứ nhất là: $\frac{21}{22} \cdot 66 = 63$

Số thứ ba là $\frac{27}{22} \cdot 66 = 81$

Bài 9. (Đề thi HSG 6)

Sau buổi biểu diễn văn nghệ, nhà trường tặng cam cho các tiết mục. Lần đầu tiết mục đồng ca hết $\frac{5}{6}$ số cam và $\frac{1}{6}$ quả; lần 2 tặng tiết mục tốp ca hết $\frac{6}{7}$ số cam còn lại và $\frac{1}{7}$ quả; lần 3 tặng tiết mục đơn ca hết $\frac{3}{4}$ số cam còn lại lần 2 và $\frac{1}{4}$ quả thì vừa hết. Tính số cam trường đó đã tặng và số cam riêng cho các tiết mục đồng ca, tốp ca và đơn ca.

Lời giải

Nhận xét : $\frac{1}{4}$ quả cuối cùng chính là $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ số cam còn lại sau lần 3. Vậy bài này phải tính ngược từ dưới lên.

Tiết mục đơn ca được tặng $\frac{1}{4} : \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1} = 1$ (quả).

Tương tự trên, tiết mục đơn ca và tốp ca được tặng :

$$\left(\frac{1}{7} + 1 \right) : \frac{1}{7} = 8 \text{ (quả).}$$

Tương tự số cam của trường đó đã tặng :

$$\left(8 + \frac{1}{6} \right) : \frac{1}{6} = 49 \text{ (quả)}$$

Số cam tặng tiết mục tốp ca : $8 - 1 = 7$ (quả)

Số cam tặng tiết mục đồng ca : $49 - 8 = 41$ (quả).

Bài 10. (Đề thi HSG 6)

Hai người đi mua gạo. Người thứ nhất mua gạo nếp, người thứ hai mua gạo tẻ. Giá gạo tẻ rẻ hơn giá gạo nếp là 20%. Biết khối lượng gạo tẻ người thứ hai mua nhiều hơn khối lượng gạo nếp là 20%. Hỏi người nào trả tiền ít hơn? ít hơn mấy % so với người kia?

Lời giải

Gọi giá gạo nếp là a (đồng/kg); khối lượng gạo nếp đã mua là b (kg)

Suy ra giá gạo tẻ là $\frac{80}{100}.a$; khối lượng gạo tẻ đã mua là $\frac{120}{100}.b$

Số tiền người thứ nhất phải trả là $a.b$ (đồng)

Số tiền người thứ hai phải trả là $\frac{80}{100}.a.\frac{120}{100}.b = \frac{96}{100}.a.b$

Vậy người thứ hai trả ít tiền hơn người thứ nhất. Tỷ lệ % ít hơn là:

$$\left(a.b - \frac{96}{100}.a.b\right) : a.b = 4\%$$

Bài 11. (Đề thi HSG 6)

Bạn Nam hỏi tuổi của bố. Bố bạn Nam trả lời: “Nếu bố sống đến 100 tuổi thì $\frac{6}{7}$ của $\frac{7}{10}$ số tuổi của bố sẽ lớn hơn $\frac{2}{5}$ của $\frac{7}{8}$ thời gian bố phải sống là 3 năm”. Hỏi bố của bạn Nam bao nhiêu tuổi.

Lời giải

Ta có: $\frac{6}{7}$ của $\frac{7}{10}$ là $\frac{6}{7}.\frac{7}{10} = \frac{3}{5}$

$\frac{2}{5}$ của $\frac{7}{8}$ là $\frac{2}{5}.\frac{7}{8} = \frac{7}{20}$

Gọi số tuổi bố của bạn Nam là x ($x \in N^*$)

Khi đó thời gian bố phải sống là $100 - x$ ($x < 100$)

Theo bài ra ta có:

$$\frac{3}{5}x = \frac{7}{20}.(100 - x) + 3$$

$$\Leftrightarrow 12x = 700 - 7x + 60$$

$$\Leftrightarrow 19x = 760$$

$$\Leftrightarrow x = 40 \text{ (t/m)}$$

Vậy bố của bạn Nam 40 tuổi

Bài 12. (Đề thi HSG 6 PHÚC THỌ 2018- 2019)

Xe máy thứ nhất đi từ A đến B mất 4 giờ, xe thứ hai đi từ B đến A mất 3 giờ. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc từ A và B thì sau 1,5 giờ hai xe sẽ còn cách nhau 15 km (hai xe chưa gặp nhau). Tính quãng đường AB

Lời giải

Mỗi giờ xe thứ nhất đi được: $1 : 4 = \frac{1}{4}$ (quãng đường AB)

Mỗi giờ xe thứ hai đi được: $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (quãng đường AB)

Sau 1,5 giờ cả hai xe đi được $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \cdot 1,5 = \frac{7}{8}$ (quãng đường AB)

Phần số chỉ 15km là: $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ (quãng đường AB)

Quãng đường AB là: $15 : \frac{1}{8} = 120(\text{km})$

Bài 13. (Đề thi HSG 6 cấp Huyện 2018 -2029)

Một xe tải khởi hành từ A lúc 7h và đến B lúc 12h. Một xe con khởi hành từ B lúc 7 giờ rưỡi và đến A lúc 11 giờ rưỡi

a) Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ

b) Biết vận tốc xe con hơn xe tải là 10 km/h. Tính quãng đường AB .

Lời giải

a) Chọn quãng đường AB làm đơn vị quy ước

Thời gian xe tải đi từ A đến B là 5h, xe con đi từ B đến A là 4h

Trong 1h hai xe gần nhau được: $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}(AB)$

Xe con khởi hành sau xe tải: $7h30ph - 7h = 30ph = \frac{1}{2}h$

Khi xe con khởi hành thì hai xe cách nhau: $1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{10}(AB)$

Hai xe gặp nhau sau: $\frac{9}{10} : \frac{9}{20} = 2h$

Hai xe gặp nhau lúc: $7h30ph + 2h = 9h30ph$

b) 10 km chính là: $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}(AB)$

Vậy quãng đường AB dài: $10 : \frac{1}{20} = 200$ (km)

Bài 14. (Đề thi hsg cấp trường năm 2016 -2017)

Một cô thư kí có thể đánh máy xong một tài liệu trong 5 giờ 10 phút. Một cô khác đánh xong tài liệu ấy trong 4 giờ 40 phút. Nếu cùng làm, cả hai cô đánh được 90 trang. Hỏi mỗi cô đánh được bao nhiêu trang ?

Lời giải

5 giờ 20 phút $= \frac{16}{3}$ giờ ; 4 giờ 40 phút $= \frac{14}{3}$.

Trong một giờ cô thứ nhất đánh được $\frac{3}{16}$ tài liệu, cô thứ hai đánh được $\frac{3}{14}$ tài liệu.

Năng suất của cô thứ nhất so với cô thứ hai là : $\frac{3}{16} : \frac{3}{14} = 7 : 8$.

Vì cùng làm trong một thời gian như nhau nên số trang đánh được tỉ lệ thuận với năng suất của mỗi người.

Do đó, số trang cô thứ nhất đánh được là : $\frac{90}{7+8} \cdot 7 = 42$ (trang)

Số trang cô thứ hai đánh được là : $\frac{90}{7+8} \cdot 8 = 48$ (trang)

Bài 15. (Đề thi học sinh giỏi quận Tân Bình năm học 2017- 2018)

Hai máy cày cùng làm việc trong 16 giờ thì cày xong một thửa ruộng. Nếu hai máy cày cùng làm việc trong 12 giờ trên thửa ruộng ấy thì phần ruộng còn lại, máy cày thứ hai phải làm việc trong 6 giờ mới xong. Hỏi nếu làm việc một mình thì mỗi máy cày phải cần một thời gian bao lâu để cày xong thửa ruộng ấy ?

Lời giải

Trong 1 giờ hai máy cày được $\frac{1}{16}$ thửa ruộng.

Và trong 12 giờ cùng làm việc hai máy cày được : $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ (thửa ruộng)

Máy thứ nhất cày $\frac{1}{4}$ thửa ruộng còn lại trong 6 giờ.

Nên để cày cả thửa ruộng, một mình máy thứ hai phải mất : $6 : \frac{1}{4} = 24$ (giờ)

Trong 1 giờ, máy thứ nhất cày được : $\frac{1}{16} - \frac{1}{24} = \frac{1}{48}$ (thửa ruộng)

Vậy thời gian máy thứ nhất một mình cày xong thửa ruộng là : $1 : \frac{1}{48} = 48$ (giờ).

.....**❧ HẾT ❧**.....

CHUYÊN ĐỀ PHÂN SỐ
CHỦ ĐỀ 6: Dãy phân số theo quy luật

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Lý thuyết nêu trong từng dạng bài tập ở phần II.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Tổng dãy phân số có dạng $\frac{k}{a.(a+k)}$.

1) Tính tổng :
$$S = \frac{1}{a_1.a_2} + \frac{1}{a_2.a_3} + \frac{1}{a_3.a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}.a_n}$$

Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = 1$

Phương pháp:

Ta có:
$$\frac{1}{a_1.a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1.a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2};$$

$$\frac{1}{a_2.a_3} = \frac{a_3 - a_2}{a_2.a_3} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3};$$

.....

$$\frac{1}{a_{n-1}.a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}.a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n};$$

Do đó:

$$S = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}$$

Bài 1: Tính tổng:
$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2014.2015}$$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2014.2015} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} = 1 - \frac{1}{2015} = \frac{2014}{2015}$$

Vậy $A = \frac{2014}{2015}$

Bài 2: Tính tổng $B = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{100.101}$

Lời giải:

Ta có: $B = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

Vậy $B = \frac{100}{101}$

Bài 3: Tính tổng $S = \frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \dots + \frac{1}{2004.2005}$

Lời giải:

Ta có:

$$S = \frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \dots + \frac{1}{2004.2005}$$
$$S = \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} = \frac{1}{9} - \frac{1}{2005} = \frac{1996}{18045}$$

Vậy $S = \frac{1996}{18045}$

2) Tính tổng : $S = \frac{1}{a_1.a_2} + \frac{1}{a_2.a_3} + \frac{1}{a_3.a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}.a_n}$

Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = k > 1$ thì:

Phương pháp:

Ta có: $\frac{k}{a_1 \cdot a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 \cdot a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2};$

$$\frac{k}{a_2 \cdot a_3} = \frac{a_3 - a_2}{a_2 \cdot a_3} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3};$$

.....

$$\frac{k}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n};$$

Do đó:

$$S = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right)$$

Bài 4: Tính tổng $A = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{99.101}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{99.101} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{101} = \frac{1}{1} - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

Vậy $S = \frac{100}{101}$

Bài 5: Tính tổng $S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{97.99}$

Lời giải:

Ta có:

$$S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{97.99}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{97.99} \\
 S &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \dots + \frac{2}{97.99} \right) \\
 S &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right) \\
 S &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{99} \right) \\
 S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{99} \\
 S &= \frac{49}{99} \\
 \text{Vậy } S &= \frac{49}{99}
 \end{aligned}$$

Bài 6: Tính nhanh tổng sau :

$$a) A = \frac{3^2}{2.5} + \frac{3^2}{5.8} + \frac{3^2}{8.11} + \frac{3^2}{11.14} + \frac{3^2}{14.17}$$

$$b) B = \frac{4}{11.16} + \frac{4}{16.21} + \frac{4}{21.26} + \dots + \frac{4}{61.66}$$

Lời giải:

a) Ta có :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{3^2}{2.5} + \frac{3^2}{5.8} + \frac{3^2}{8.11} + \frac{3^2}{11.14} + \frac{3^2}{14.17} \\
 A &= \frac{3.3}{2.5} + \frac{3.3}{5.8} + \frac{3.3}{8.11} + \frac{3.3}{11.14} + \frac{3.3}{14.17} \\
 A &= 3 \left(\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \frac{3}{8.11} + \frac{3}{11.14} + \frac{3}{14.17} \right) \\
 A &= 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} \right) \\
 A &= 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{17} \right) \\
 A &= 3 \cdot \frac{15}{34} \\
 A &= \frac{45}{34}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{45}{34}$$

b) Ta có :

$$\begin{aligned} B &= \frac{4}{11.16} + \frac{4}{16.21} + \frac{4}{21.26} + \dots + \frac{4}{61.66} \\ B &= 4 \left(\frac{1}{11.16} + \frac{1}{16.21} + \frac{1}{21.26} + \dots + \frac{1}{61.66} \right) \\ \Rightarrow 5B &= 4 \left(\frac{5}{11.16} + \frac{5}{16.21} + \frac{5}{21.26} + \dots + \frac{5}{61.66} \right) \\ 5B &= 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{21} + \frac{1}{21} - \frac{1}{26} + \dots + \frac{1}{61} - \frac{1}{66} \right) \\ 5B &= 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{66} \right) \Rightarrow 5B = 4 \cdot \frac{55}{11.66} \Rightarrow B = \frac{4}{66} = \frac{2}{33} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{2}{33}$$

Bài 7: Tính giá trị của biểu thức :

$$A = \left(\frac{3}{1.8} + \frac{3}{8.15} + \frac{3}{15.22} + \dots + \frac{3}{106.113} \right) - \left(\frac{25}{50.55} + \frac{25}{55.60} + \dots + \frac{25}{95.100} \right)$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } B = \frac{3}{1.8} + \frac{3}{8.15} + \frac{3}{15.22} + \dots + \frac{3}{106.113}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} 7B &= 3 \left(\frac{7}{1.8} + \frac{7}{8.15} + \frac{7}{15.22} + \dots + \frac{7}{106.113} \right) \\ 7B &= 3 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{106} - \frac{1}{113} \right) \\ 7B &= 3 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{113} \right) = 3 \cdot \frac{112}{113} \Rightarrow B = \frac{3.112}{7.113} = \frac{48}{113} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } C = \frac{25}{50.55} + \frac{25}{55.60} + \dots + \frac{25}{95.100}$$

Ta có :

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}C &= \frac{5}{50.55} + \frac{5}{55.60} + \dots + \frac{5}{95.100} \\ \frac{1}{5}C &= \frac{1}{50} - \frac{1}{55} + \frac{1}{55} - \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{95} - \frac{1}{100} \\ \frac{1}{5}C &= \frac{1}{50} - \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \\ \Rightarrow C &= \frac{1}{20}\end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } A = B - C = \frac{48}{113} - \frac{1}{20} = \frac{847}{2260}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{847}{2260}.$$

Bài 8: Tính nhanh : $A = \frac{9}{9.19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{1}{1999.2009}$

Lời giải:

$$\begin{aligned}A &= \frac{9}{9.19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{1}{1999.2009} \\ 10A &= 9 \left(\frac{10}{9.19} + \frac{10}{19.29} + \frac{10}{29.39} + \dots + \frac{10}{1999.2009} \right) \\ 10A &= 9 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{39} + \dots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2009} \right) \\ 10A &= 9 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2009} \right) \\ 10A &= 9 \cdot \frac{2000}{9.2009} = \frac{2000}{2009} \Rightarrow A = \frac{200}{2009} \\ \text{Vậy } A &= \frac{200}{2009}.\end{aligned}$$

Bài 9: Thực hiện phép tính : $A = 3 \cdot \frac{1}{1.2} - 5 \cdot \frac{1}{2.3} + 7 \cdot \frac{1}{3.4} - \dots + 15 \cdot \frac{1}{7.8} - 17 \cdot \frac{1}{8.9}$

Lời giải:

Ta có :

$$A = 3 \cdot \frac{1}{1.2} - 5 \cdot \frac{1}{2.3} + 7 \cdot \frac{1}{3.4} - \dots + 15 \cdot \frac{1}{7.8} - 17 \cdot \frac{1}{8.9}$$

$$A = \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - \dots + \frac{15}{7.8} - \frac{17}{8.9}$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \dots + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right)$$

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{9}$$

$$A = \frac{8}{9}$$

Vậy $A = \frac{8}{9}$.

Bài 10: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{1.300} + \frac{1}{2.301} + \frac{1}{3.302} + \dots + \frac{1}{101.400}$ và

$$B = \frac{1}{1.102} + \frac{1}{2.103} + \frac{1}{3.104} + \dots + \frac{1}{299.400}$$

Lời giải:

Ta có:

$$299A = \frac{299}{1.300} + \frac{299}{2.301} + \frac{299}{3.302} + \dots + \frac{299}{101.400}$$

$$299A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{300} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{301} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{302} \right) + \dots + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{400} \right)$$

$$299A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101} \right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{400} \right)$$

$$101B = \frac{101}{1.102} + \frac{101}{2.103} + \frac{101}{3.104} + \dots + \frac{101}{299.400}$$

$$101B = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{102} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{103} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{104} \right) + \dots + \left(\frac{1}{299} - \frac{1}{400} \right)$$

$$101B = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{299} \right) - \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \frac{1}{104} + \dots + \frac{1}{400} \right)$$

$$101B = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101} \right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \dots + \frac{1}{400} \right)$$

Khi đó $299A = 101B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{101}{299}$.

Bài 11: Rút gọn : $A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1} \\ A &= \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100.99} + \frac{1}{99.98} + \frac{1}{98.97} + \dots + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1} \right) \\ A &= \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100} \right) \\ A &= \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \\ A &= \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{100} \right) \\ A &= \frac{1}{100} - 1 + \frac{1}{100} = \frac{-49}{50} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{-49}{50}$.

Dạng 2: Tổng dãy phân số có mẫu là tích n số tự nhiên liên tiếp ($n \geq 3$).

1) Tính tổng sau: $S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Nhận xét đề bài:

- + Tử các số hạng đều là 1.
- + Mẫu các số hạng đều là tích ba số tự nhiên liên tiếp.
- + Số hạng tổng quát có dạng: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Ta có:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$$

Do đó:

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right)$$

$$\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right)$$

.....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được:

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

- Nhận xét kết quả:

Nếu mẫu là tích 3 số tự nhiên liên tiếp thì tổng bằng tích nghịch đảo của $(3-1)$ với hiệu nghịch đảo của tích hai thừa số có giá trị nhỏ nhất và nghịch đảo của tích hai thừa số có giá trị lớn nhất.

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

Bài 1: Tính $A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{37.38.39}$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{37.38.39} \\A &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39} \right) \\A &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39} \right) \\A &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{38.39} \right) \\A &= \frac{185}{741}\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{185}{741}$.

Bài 2: Tính tổng $S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{97.98.99}$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{97.98.99} \Rightarrow 2S = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{97.98.99} \\ \Rightarrow 2S &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{98} \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right) \\ \Rightarrow 2S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} \cdot \frac{1}{97} - \frac{1}{98} \cdot \frac{1}{99} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} - \frac{1}{98.99} = \frac{2425}{4851} \\ \Rightarrow S &= \frac{2425}{9702}\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{2425}{9702}$.

2) Tính tổng sau: $S = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

- Nhận xét đề bài:

+ Tử các số hạng đều là 1.

+ Mẫu các số hạng đều là tích bốn số tự nhiên liên tiếp.

+ Số hạng tổng quát có dạng: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(k+3)-k}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right] \end{aligned}$$

Do đó:

$$\frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} \right)$$

$$\frac{1}{2.3.4.5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} \right)$$

.....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\ \Rightarrow S_n &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \end{aligned}$$

Bài 3: Tính $B = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots + \frac{1}{27.28.29.30}$

Lời giải:

Nhận xét: $\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} = \frac{3}{1.2.3.4}; \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} = \frac{3}{2.3.4.5}; \dots; \frac{1}{27.28.29} - \frac{1}{28.29.30} = \frac{3}{27.28.29.30}$

Ta có:

$$B = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots + \frac{1}{27.28.29.30}$$

$$\Rightarrow 3B = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{28.29.30} = \frac{4059}{28.29.30}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1353}{8120}$$

Vậy $A = \frac{1353}{8120}$.

Bài 4: Tính $D = \frac{18}{10.11.12.13} + \dots + \frac{18}{96.97.98.99}$

Lời giải:

Ta có:

$$D = \frac{18}{10.11.12.13} + \dots + \frac{18}{96.97.98.99}$$

$$D = 6 \left(\frac{1}{10.11.12} - \frac{1}{97.98.99} \right)$$

$$D = 6 \cdot \frac{97.98.99 - 10}{97.98.99.10}$$

$$D = \frac{14239}{3136980}$$

Vậy $D = \frac{14239}{3136980}$.

Dạng 3. Tích dãy phân số theo quy luật

Bài 1: Tính tích.

a) $A = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{20^2}{19.20}$

b) $B = \frac{1^2}{1.2} \cdot \frac{2^2}{2.3} \cdot \frac{3^2}{3.4} \dots \frac{10^2}{10.11}$

Lời giải:

a) Ta có:

$$A = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdots \frac{20^2}{19.20} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdots \frac{20.20}{19.20} = \frac{(2.3.4 \dots 20)(2.3.4 \dots 20)}{(1.2.3 \dots 19)(3.4.5 \dots 21)} = \frac{20.2}{21} = \frac{40}{21}$$

b) Ta có:

$$B = \frac{1^2}{1.2} \cdot \frac{2^2}{2.3} \cdot \frac{3^2}{3.4} \cdots \frac{10^2}{10.11} = \frac{1.1}{1.2} \cdot \frac{2.2}{2.3} \cdot \frac{3.3}{3.4} \cdots \frac{10.10}{10.11} = \frac{(1.2.3 \dots 10)(1.2.3 \dots 10)}{(1.2.3 \dots 10)(2.3.4 \dots 11)} = \frac{1}{11}$$

Bài 2: Tính tích: $C = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+2+3+4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+2016}\right)$

Lời giải:

Ta có:

$$C = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+2+3+4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+2016}\right)$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2).2}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+3).3}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+4).4}{2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2016).2016}{2}}\right)$$

$$C = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{2016.2017-2}{2016.2017}$$

$$C = \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{18}{20} \cdots \frac{2016.2017-2}{2016.2017}$$

$$C = \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdots \frac{2015.2018}{2016.2017}$$

$$C = \frac{1004}{3009}$$

Vậy $C = \frac{1004}{3009}$

Bài 3: Tính: $A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{99}\right)$.

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{1}{2.3} \cdot \frac{3}{2.5} \cdot \frac{5}{2.7} \cdots \frac{97}{2.99} = \frac{(1.3.5 \dots 97)}{2^{49}(3.5.7 \dots 99)} = \frac{1}{2^{49}.99}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{2^{49}.99}$$

Bài 4: Tính: $A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{400}\right).$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{400}\right)$$

$$A = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdots \frac{399}{400}$$

$$A = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdots \frac{19.21}{20.20}$$

$$A = \frac{(1.2.3 \dots 19)(3.4.5 \dots 21)}{(2.3.4 \dots 20)(2.3.4 \dots 20)}$$

$$A = \frac{21}{20.2}$$

$$A = \frac{21}{40}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{21}{40}$$

Bài 5: Tính:

$$\text{a) } A = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2018.2020}\right) \quad \text{b) } B = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

Lời giải:

a) Ta có:

$$A = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2018.2020}\right)$$

$$A = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdots \frac{2019^2}{2018.2019}$$

$$A = \frac{(2.3.4 \cdots 2019)(2.3.4 \cdots 2019)}{(1.2.3 \cdots 2.18)(3.4.5 \cdots 2019)}$$

$$A = 2.2019 = 4038$$

Vậy $A = 4038$

b) Ta có:

$$B = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

$$B = \left(\frac{5-1}{5}\right) \cdot \left(\frac{6-1}{6}\right) \cdots \left(\frac{99-1}{99}\right) \cdot \left(\frac{100-1}{100}\right)$$

$$B = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100}$$

$$B = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

Vậy $B = \frac{1}{25}$

Bài 6: Tính tích:

$$a) C = \frac{2^2}{3} \cdot \frac{3^2}{8} \cdot \frac{4^2}{15} \cdot \frac{5^2}{24} \cdot \frac{6^2}{35} \cdot \frac{7^2}{48} \cdot \frac{8^2}{63} \cdot \frac{9^2}{80}$$

$$b) D = \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdots \frac{2499}{2500}.$$

Lời giải:

a) Ta có:

$$C = \frac{2^2}{3} \cdot \frac{3^2}{8} \cdot \frac{4^2}{15} \cdot \frac{5^2}{24} \cdot \frac{6^2}{35} \cdot \frac{7^2}{48} \cdot \frac{8^2}{63} \cdot \frac{9^2}{80} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{5.5}{4.6} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{7.7}{6.8} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \frac{9.9}{8.10}$$

$$= \frac{(2.3.4.5.6.7.8.9)(2.3.4.5.6.7.8.9)}{(1.2.3.4.5.6.7.8)(3.4.5.6.7.8.9.10)} = \frac{9.2}{10} = \frac{9}{5}$$

Vậy $C = \frac{9}{5}$

b) Ta có:

$$D = \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdots \frac{2499}{2500} = \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdots \frac{49.51}{50.50} = \frac{(2.3.4 \dots 49)(4.5.6 \dots 51)}{(3.4.5 \dots 50)(3.4.5 \dots 50)} = \frac{2.51}{50.3} = \frac{17}{25}$$

Vậy $D = \frac{17}{25}$

Bài 7: Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2015.2017}\right)$

Lời giải:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2015.2017}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2.2}{1.3}\right) \cdot \left(\frac{3.3}{2.4}\right) \cdot \left(\frac{4.4}{3.5}\right) \cdots \left(\frac{2016.2016}{2015.2017}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(2.3.4 \dots 2016)(2.3.4 \dots 2016)}{(1.2.3 \dots 2015)(3.4.5 \dots 2017)}\right]$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2016}{1} \cdot \frac{2}{2017}\right)$$

$$A = \frac{2016}{2017}$$

Vậy $A = \frac{2016}{2017}$

Bài 8: So sánh: $V = \frac{1}{2^{20} - 1}$ và $U = \frac{1.3.5 \dots 39}{21.22.23 \dots 40}$

Lời giải:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1.3.5...39}{21.22.23...40} = \frac{1.3.5...37.39}{(21.23.25...39)(22.24.26...40)} = \frac{1.3.5...37.39}{(21.23.25...39).2^{10}(11.12.13...20)} \\ &= \frac{1.3.5...37.39}{2^{10}(21.23.25...39).(11.13...19)(12.14...20)} = \frac{1.3.5...37.39}{2^{10}(11.13.55...39).2^5.(6.7.8.9.10)} \\ &= \frac{1.3.5...37.39}{2^{15}(7.9.11...39).(6.8.10)} = \frac{1.3.5...37.39}{2^{15}(7.9...39).2^5.3.5} = \frac{1.3.5...37.39}{2^{20}.3.5.7...39} = \frac{1}{2^{20}} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2^{20}} < \frac{1}{2^{20}-1} \Rightarrow U < V$$

Dạng 4: Tính tổng dãy phân số có mẫu là lũy thừa các số tự nhiên.

Bài 1: Tính tổng sau: $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2005}}$ (1)

Lời giải:

Cách 1: Ta thấy mỗi số hạng liên sau của tổng đều kém số hạng liên trước của nó 2 lần.

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2004}} \quad (2)$$

Trừ vế với vế của (2) cho (1) ta được $S = 1 - \frac{1}{2^{2005}} = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2005}}$

Cách 2: Ta có: $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2006}}$ (3)

Trừ vế với vế của (1) cho (3) ta được: $s - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2006}} = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2006}} \Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2006}} \Rightarrow S = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2005}}$

Bài 2: Tính nhanh: $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^8}$

Lời giải:

Ta có: $3A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7} \quad (1)$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7} \quad (2)$$

Lấy (1) – (2) được: $2A = 1 - \frac{1}{3^8} = 1 - \frac{1}{6561} = \frac{6560}{6561}$

Do đó: $A = \frac{6560}{6561}$

Bài 3: Tính tổng sau: $A = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{100}}$

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{7}A = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{100}} + \frac{1}{7^{101}}$

$$A - \frac{1}{7}A = \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^2}\right) + \left(\frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{7^{100}} - \frac{1}{7^{100}}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7^{101}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{6}{7}A = \frac{7^{100} - 1}{7^{101}} \Rightarrow A = \frac{7^{100} - 1}{6 \cdot 7^{100}}$$

Bài 4: Tính tổng: $G = \frac{3}{5} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^7} + \dots + \frac{3}{5^{100}}$

Lời giải:

Ta có:

$$G = \frac{3}{5} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^7} + \dots + \frac{3}{5^{100}} = 3 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5^{100}} \right)$$

Đặt $A = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5^{100}} \right) \Rightarrow \frac{1}{5^3}A = \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{5^{10}} + \dots + \frac{1}{5^{103}}$

$$A - \frac{1}{125}A = \left(\frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^4}\right) + \left(\frac{1}{5^7} - \frac{1}{5^7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{5^{100}} - \frac{1}{5^{100}}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{103}}\right)$$

$$\frac{124.A}{125} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5^{103}} = \frac{5^{102} - 1}{5^{103}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{5^{102} - 1}{5^{100} \cdot 124}$$

Bài 5: Tính tổng: $C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{2^2}C = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{101}}$

$$C - \frac{1}{4}C = \frac{3}{4}C = \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{98}} - \frac{1}{2^{98}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{101}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}C = \frac{2^{100} - 1}{2^{101}} \Rightarrow C = \frac{2^{100} - 1}{3 \cdot 2^{99}}$$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tính giá trị biểu thức: $D = \frac{3^2}{2.5} + \frac{3^2}{5.8} + \frac{3^2}{8.11} + \frac{3^2}{11.14} + \frac{3^2}{14.17}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Hoàng Hóa năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$D = \frac{3^2}{2.5} + \frac{3^2}{5.8} + \frac{3^2}{8.11} + \frac{3^2}{11.14} + \frac{3^2}{14.17}$$

$$D = \frac{3.3}{2.5} + \frac{3.3}{5.8} + \frac{3.3}{8.11} + \frac{3.3}{11.14} + \frac{3.3}{14.17}$$

$$D = 3 \cdot \left(\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \frac{3}{8.11} + \frac{3}{11.14} + \frac{3}{14.17} \right)$$

$$D = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{17} \right) = 3 \cdot \frac{15}{34} = \frac{45}{34}$$

Vậy $D = \frac{45}{34}$

Bài 2: Tính hợp lí: $C = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{98.99.100}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Ba Vì năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$C = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{98.99.100}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2C &= \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{98.99.100} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100} \\ &= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{99.100} = \frac{50.99 - 1}{100.99} = \frac{4949}{9900} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = \frac{4949}{19800}$$

Bài 3: Thực hiện phép tính sau:

$$B = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{2015.2018}$$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Nghi Xuân năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$B = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{2015.2018}$$

$$B = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \frac{3}{8.11} + \dots + \frac{3}{2015.2018} \right)$$

$$B = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2018} \right)$$

$$B = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2018} \right)$$

$$B = \frac{336}{2018}$$

Bài 4: Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Nga Sơn năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4} = \frac{5}{2} + \frac{4}{11} + \frac{3}{22} + \frac{1}{30} + \frac{13}{60} = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{30} + \frac{13}{60} \right) + \left(\frac{4}{11} + \frac{3}{22} \right) \\ &= \left(\frac{5.30}{2.30} + \frac{1.2}{30.2} + \frac{13.1}{60.1} \right) + \left(\frac{4.2}{11.2} + \frac{3}{22} \right) = \frac{150+12+13}{60} + \frac{11}{22} \\ &= \frac{165}{60} + \frac{11}{22} = \frac{11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

Vậy $C = \frac{13}{4}$

Bài 5: Tính: $C = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Như Thanh năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$C = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90}$$

$$C = -\left(\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10}\right)$$

$$C = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$$

$$C = -\frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{-3}{20}$$

$$\text{Vậy } C = \frac{-3}{20}$$

Bài 6: Tính hợp lí giá trị biểu thức sau: $B = \frac{2}{60.63} + \frac{2}{63.66} + \frac{2}{66.69} + \dots + \frac{2}{117.120}$ (

Trích đề HSG Toán 6 huyện Nông Cống năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$B = \frac{2}{60.63} + \frac{2}{63.66} + \frac{2}{66.69} + \dots + \frac{2}{117.120}$$

$$B = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{60.63} + \frac{3}{63.66} + \frac{3}{66.69} + \dots + \frac{3}{117.120}\right)$$

$$B = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{63} + \frac{1}{63} - \frac{1}{66} + \frac{1}{66} - \frac{1}{69} + \dots + \frac{1}{117} - \frac{1}{120}\right)$$

$$B = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{120}\right)$$

$$B = \frac{1}{180}$$

$$\text{Vậy } C = \frac{1}{180}$$

Bài 7: Tính giá trị các biểu thức:

$$\text{a) } A = \left(2019 - \frac{1}{2019}\right) - \left(2018 - \frac{1}{2019}\right)$$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Nghĩa Đàn năm học 2018-2019)

Lời giải:

a) Ta có:

$$A = \left(2019 - \frac{1}{2019}\right) - \left(2018 - \frac{1}{2019}\right)$$

$$A = 2019 - \frac{1}{2019} - 2018 + \frac{1}{2019}$$

$$A = 2019 - 2018 - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019}$$

$$A = 1$$

Vậy $A = 1$

Bài 8: Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } B = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{400} - 1\right) \quad \text{b) } C = \frac{\frac{2010}{1} + \frac{20009}{2} + \frac{2008}{3} + \cdots + \frac{1}{2010}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2011}}$$

(Trích đề HSG Toán 6 thành phố Chí Linh năm học 2018-2019)

Lời giải:

a) Ta có:

$$B = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{400} - 1\right)$$

$$B = \frac{-3}{4} \cdot \frac{-8}{9} \cdot \frac{-15}{15} \dots \frac{-399}{400}$$

$$B = -\frac{3 \cdot 8 \cdot 15 \dots 399}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \dots 20^2}$$

$$B = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \dots 19 \cdot 21}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \dots 20 \cdot 20}$$

$$B = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 19}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 20} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 21}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 20}$$

$$B = -\frac{1}{20} \cdot \frac{21}{2} = -\frac{21}{40}$$

Vậy $B = -\frac{21}{40}$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2010}{1} + \frac{2009}{2} + \frac{2008}{3} + \dots + \frac{1}{2010} &= \left(\frac{2009}{2} + 1\right) + \left(\frac{2008}{3} + 1\right) + \left(\frac{2007}{4} + 1\right) + \dots + \left(\frac{1}{2010} + 1\right) + 1 \\ &= \frac{2011}{2} + \frac{2011}{3} + \frac{2011}{4} + \dots + \frac{2011}{2010} + \frac{2011}{2011} = 2011 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2010} + \frac{1}{2011}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } C = \frac{\frac{2010}{1} + \frac{2009}{2} + \frac{2008}{3} + \dots + \frac{1}{2010}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011}} = \frac{2011 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011}} = 2011$$

Vậy $C = 2011$.

Bài 9: Tính $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2018}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2019}\right)$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Thanh Trì năm học 2012018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2018}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2019}\right)$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2017}{2018} \cdot \frac{2018}{2019} = \frac{1}{2019}$$

Vậy $A = \frac{1}{2019}$

Bài 10: Cho $A = \frac{34}{7.13} + \frac{51}{13.22} + \frac{85}{22.37} + \frac{68}{37.49}$ và $B = \frac{39}{7.16} + \frac{65}{16.31} + \frac{52}{31.43} + \frac{26}{43.49}$

Tính $\frac{A}{B}$.

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Vĩnh Yên năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{34}{7.13} + \frac{51}{13.22} + \frac{85}{22.37} + \frac{68}{37.49}$$

$$A = \frac{17.2}{7.13} + \frac{17.3}{13.22} + \frac{17.5}{22.37} + \frac{17.4}{37.49}$$

$$A = \frac{17}{3} \left(\frac{3.2}{7.13} + \frac{3.3}{13.22} + \frac{3.5}{22.37} + \frac{3.4}{37.49} \right)$$

$$A = \frac{17}{3} \left(\frac{6}{7.13} + \frac{9}{13.22} + \frac{15}{22.37} + \frac{12}{37.49} \right)$$

$$A = \frac{17}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{22} + \frac{1}{22} - \frac{1}{37} + \frac{1}{37} - \frac{1}{49} \right)$$

$$A = \frac{17}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right)$$

Ta lại có:

$$B = \frac{39}{7.16} + \frac{65}{16.31} + \frac{52}{31.43} + \frac{26}{43.49}$$

$$B = \frac{13.3}{7.16} + \frac{13.5}{16.31} + \frac{13.4}{31.43} + \frac{13.2}{43.49}$$

$$B = \frac{13}{3} \left(\frac{3.3}{7.16} + \frac{3.5}{16.31} + \frac{3.4}{31.43} + \frac{3.2}{43.49} \right)$$

$$B = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{31} + \frac{1}{31} - \frac{1}{43} + \frac{1}{43} - \frac{1}{49} \right)$$

$$B = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{A}{B} = \frac{\frac{17}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right)}{\frac{13}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right)} = \frac{17}{13}$$

$$\text{Vậy } \frac{A}{B} = \frac{17}{13}.$$

Bài 11: Tính giá trị của biểu thức: $A = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{199}} - \frac{1}{3^{200}}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Ngọc Lặc năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$3A = 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{198}} - \frac{1}{3^{199}}$$

$$3A + A = \left(3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{198}} - \frac{1}{3^{199}} \right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{199}} - \frac{1}{3^{200}} \right) = 5 - \frac{1}{3^{200}}$$

$$4A = 5 - \frac{1}{2^{200}} \Rightarrow A = \left(5 - \frac{1}{2^{200}}\right) : 4$$

Bài 12: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết:

$$A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57} \text{ và } B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Phú Xuyên năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{A}{5} = \frac{4}{35.31} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{50.41} + \frac{7}{50.57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{35} + \frac{1}{35} - \frac{1}{41} + \frac{1}{41} - \frac{1}{50} + \frac{1}{50} - \frac{1}{57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{7}{38.31} + \frac{5}{38.43} + \frac{3}{46.43} + \frac{11}{46.57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{38} + \frac{1}{38} - \frac{1}{43} + \frac{1}{43} - \frac{1}{46} + \frac{1}{46} - \frac{1}{57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{5} = \frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{5}{2}.$$

Bài 13: Tính tổng $S = 1 - \frac{11}{6} + \frac{19}{12} - \frac{29}{20} + \frac{41}{30} - \frac{55}{42} + \frac{71}{56} - \frac{89}{72} + \frac{109}{90}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Gia Lộc năm học 2018-2018)

Lời giải:

$$S = 1 - \frac{11}{6} + \frac{19}{12} - \frac{29}{20} + \frac{41}{30} - \frac{55}{42} + \frac{71}{56} - \frac{89}{72} + \frac{109}{90}$$

$$S = 1 - 1 - \frac{5}{6} + 1 + \frac{7}{12} - 1 - \frac{9}{20} + 1 + \frac{11}{30} - 1 - \frac{13}{42} + 1 + \frac{15}{56} - 1 - \frac{19}{72} + 1 + \frac{19}{90}$$

$$S = 1 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90}$$

$$S = 1 - \frac{2+3}{2.3} + \frac{3+4}{3.4} - \frac{4+5}{4.5} + \frac{5+6}{5.6} - \frac{6+7}{6.7} + \frac{7+8}{7.8} - \frac{8+9}{8.9} + \frac{9+10}{9.10}$$

$$S = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

Vậy $S = \frac{3}{5}$.

Bài 14: Tính tổng $S = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2}$

(Trích đề HSG Toán 6 Ninh Bình năm học 2018-2019).

Lời giải:

Ta có:

$$S = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{5^2 - 4^2}{4^2 \cdot 5^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

Vậy $S = \frac{99}{100}$.

Bài 15: Hãy so sánh:

$$A = 124 \left(\frac{1}{1.1985} + \frac{1}{2.1986} + \dots + \frac{1}{16.2000} \right) \text{ và } B = \frac{1}{1.17} + \frac{1}{2.18} + \dots + \frac{1}{1984.2000}$$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Ninh Giang năm học 2018-2019).

Lời giải:

Ta có:

$$A = 124 \left(\frac{1}{1.1985} + \frac{1}{2.1986} + \dots + \frac{1}{16.2000} \right)$$

$$= \frac{124}{1984} \left(1 - \frac{1}{1985} + \dots + \frac{1}{16} - \frac{1}{2000} \right)$$

$$= \frac{1}{16} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{16} \right) \right] - \left(\frac{1}{1985} + \frac{1}{1986} + \dots + \frac{1}{2000} \right)$$

$$B = \frac{1}{16} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{16} \right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{1984} - \frac{1}{17} - \frac{1}{18} - \dots - \frac{1}{1984} \right) - \left(\frac{1}{1985} + \frac{1}{1986} + \dots + \frac{1}{2000} \right) \right]$$

$$B = \frac{1}{16} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{1}{1985} + \frac{1}{1986} + \dots + \frac{1}{2000} \right) \right] = A$$

Vậy $A = B$.

∞ HẾT ∞

CHUYÊN ĐỀ PHÂN SỐ
CHỦ ĐỀ 7: BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN PHÂN SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.**I. Khái niệm bất đẳng thức**

1. Định nghĩa : Số a gọi là lớn hơn số b , ký hiệu $a > b$ nếu $a - b$ là một số dương, tức là $a - b > 0$. Khi đó ta cũng ký hiệu $b < a$

Ta có: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

Nếu $a > b$ hoặc $a = b$, ta viết $a \geq b$. Ta có: $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$

2. Quy ước :

- Khi nói về một bất đẳng thức mà không chỉ rõ gì hơn thì ta hiểu rằng đó là một bất đẳng thức đúng.
- Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng

II. Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

1. Tính chất 1: $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$

2. Tính chất 2: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

Từ đó ta suy ra

$$a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$$

$$a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$$

3. Tính chất 3: $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$

4. Tính chất 4: $a > b \Rightarrow \begin{cases} ac > bc & \text{nếu } c > 0 \\ ac < bc & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$

Từ đó ta suy ra

$$a > b \Leftrightarrow -a < -b$$

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} & \text{nếu } c > 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$$

5. Tính chất 5: $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$

6. Tính chất 6: $a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

7. Tính chất 7: $a > b > 0, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^n > b^n$

8. Tính chất 8: Nếu a và b là hai số dương thì : $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

Nếu a và b là hai số không âm thì : $a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng 1: TỔNG LŨY THỪA

I. Phương pháp giải

So sánh các số hạng trong tổng với các số hạng trong tổng liên tiếp để tìm mối quan hệ. Nếu muốn chứng minh lớn hơn một giá trị k nào đó, ta cần so sánh với số hạng có mẫu lớn hơn và ngược lại

I. Bài toán

Bài 1: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2020^2} < 1$

Lời giải:

Ta thấy bài toán có dạng tổng các lũy thừa bậc hai, nên ta sẽ phân tích tổng A như sau:

$$A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{2018.2019} + \frac{1}{2019.2020}$$

Đến đây ta sẽ so sánh với phân số có mẫu nhỏ hơn, vì yêu cầu bài toán là chứng minh nhỏ hơn.

$$\begin{aligned} A &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2019.2019} + \frac{1}{2019.2020} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}\right) + \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) \\ A &< \frac{1}{1} - \frac{1}{2020} < 1 \end{aligned}$$

Bài 2: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải:

Ở bài toán này, ta phải chứng minh hai chiều, chiều thứ nhất ta cần chứng minh:

$$A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} \text{ và chứng minh } A > \frac{1}{6}$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{5.5} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{7.7} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$$

$$A > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} \text{ đến đây, ta sẽ so sánh } \frac{96}{505} \text{ với } \frac{1}{6} \text{ như sau:}$$

$$\text{Ta có: } \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \text{ bằng cách ta nhân cả tử và mẫu của phân số } \frac{1}{6} \text{ với 96 để được hai phân số}$$

$$\text{cùng tử rồi so sánh khi đó ta có: } A > \frac{96}{505} > \frac{96}{567} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\text{Chiều thứ hai, ta cần chứng minh: } A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Ta làm tương tự như sau:

$$A = \frac{1}{5.5} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{7.7} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{1}{6} < A < \frac{1}{4}$$

Bài 3: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}$

Lời giải:

Ta biến đổi:

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{3}{4} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4}$$

Bài 4: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

Lời giải:

Nhận thấy bài này là tổng lũy thừa mà cơ số ở mẫu là các số chẵn nên ta sẽ đưa về tổng lũy thừa mà cơ số ở mẫu là các số tự nhiên liên tiếp như sau:

$$A = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) < \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50} \right)$$
$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{200} < \frac{1}{2}$$

Bài 5: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{100}{2^{100}} < 2$

Lời giải:

Nhận thấy bài này có dạng tổng các phân số có mẫu là các lũy thừa cùng cơ số nên ta sẽ thực hiện phép tính tổng A

Việc tính chính xác được tổng A sẽ giảm bớt sự sai số, tuy nhiên không phải tổng nào cũng có thể tính được.

Ta tính tổng A như sau: $2A = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{99}{2^{98}} + \frac{100}{2^{99}}$

Sau đó lấy $2A$ trừ A theo vế và nhóm các phân số có cùng mẫu ta được:

$$A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}}, \text{ đặt } B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \text{ và tính tổng } B \text{ theo cách như trên}$$

ta được: $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{99}}$, thay vào A ta được: $A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}} < 2$

Bài 6: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$

Lời giải:

Tính tương tự như bài 5, ta có: $2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$,

Đặt $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$, và tính B rồi thay vào tổng A ta được

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^{99}}$$

$$\Rightarrow 2A = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Bài 7: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Bài 8: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{4}$$

Bài 9: So sánh $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ với $\frac{1}{2}$

Lời giải:

$$A = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{2}$$

Bài 10: Chứng minh rằng với số tự nhiên $n > 2$ thì $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ không là số tự nhiên

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} < 2. \text{ Mặt khác ta thấy } A > 1$$

Vậy ta có: $1 < A < 2$.

Bài 11: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < \frac{2020}{2021}$

Lời giải:

$$A < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

Bài 12 : Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{4} < \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}} < \frac{1}{3}$

Lời giải:

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}}$$

$$4A = 1 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2005}} \right) - \frac{2016}{5^{2016}}.$$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2005}}$$

Ta có:

$$4B = 1 - \frac{1}{5^{2015}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^{2015}}, \text{ thay vào } A \text{ ta được:}$$

$$4A = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^{2015}} - \frac{2016}{5^{2016}} < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow A < \frac{5}{16} < \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}} > \frac{1}{5} + \frac{2}{25} = \frac{7}{25} > \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra ĐPCM

Bài 13 : Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$

Lời giải:

$$\text{Tính tổng } A, \text{ ta được: } 4A = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\text{Đặt } B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}}$$

$$B = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{99}}$$

$$\Rightarrow 4A = \frac{3}{4} - \frac{1}{3^{99} \cdot 4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A < \frac{3}{16}$$

Bài 14 : Chứng tỏ rằng: $A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} \right)$

$$A = 1 - \frac{1}{10^2} < 1$$

Bài 15 : Chứng tỏ rằng: $A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4019}{2009^2 \cdot 2010^2} < 1$

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2010^2 - 2009^2}{2009^2 \cdot 2010^2}$

$$A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2009^2} - \frac{1}{2010^2} = 1 - \frac{1}{2010^2} < 1$$

Bài 16: Chứng tỏ rằng: $S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{2020}} - \frac{1}{2^{2022}} < \frac{1}{5}$

Lời giải:

$$\frac{1}{2^2} S = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^{10}} + \dots + \frac{1}{2^{2022}} - \frac{1}{2^{2024}}$$

$$\Rightarrow S + \frac{S}{4} = \frac{5S}{4} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2024}} < \frac{1}{4} \Rightarrow S < \frac{1}{5}$$

Bài 17: Chứng tỏ rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} < \frac{1}{2}$

Lời giải:

$$\frac{1}{3} B = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}$$

$$\Rightarrow B - \frac{1}{3} B = \frac{2B}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{2021}} < \frac{1}{3}$$

Hay $B < \frac{1}{2}$

Bài 18: Chứng tỏ rằng: $M = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}}$ có giá trị không nguyên

Lời giải:

$$\text{Ta có: } M = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}} > 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } M = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}}$$

$$\Rightarrow 3M = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2021}{3^{2020}}$$

$$\Rightarrow 3M - M = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2021}{3^{2020}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}}\right)$$

$$\Rightarrow 2M = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} - \frac{2021}{3^{2021}}$$

$$\text{Đặt } N = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} \Rightarrow 3N = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2019}}$$

$$\Rightarrow 3N - N = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2019}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}}\right)$$

$$\Rightarrow 2N = 1 - \frac{1}{3^{2020}} \Rightarrow N = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2020}}$$

$$\Rightarrow 2M = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2020}} - \frac{2021}{3^{2021}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2020}} - \frac{2021}{3^{2021}} < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow M < \frac{3}{4} < 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 < M < 1$

Vậy $M = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}}$ không có giá trị nguyên

Bài 19: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$

Lời giải:

$$A < \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 6} + \frac{2}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{2}{2006 \cdot 2008} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$$

Bài 20: Chứng tỏ rằng: $S = \frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \dots + \frac{3}{n(n+3)} < 1$

Lời giải:

$$S = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) = 1 - \frac{1}{n+3} < 1$$

Bài 21: Chứng tỏ rằng: $B = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots - \frac{1}{2021^2} > \frac{1}{2021}$

Lời giải:

$$B = 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2}\right),$$

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} \text{ ta có:}$$

$$A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2020.2021} < 1 - \frac{1}{2021}$$

$$\Rightarrow -A > -1 + \frac{1}{2021}$$

$$B > 1 - A = 1 - 1 + \frac{1}{2021}$$

$$\Rightarrow B > \frac{1}{2021}$$

Bài 22: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2020}} < 0,2$

Lời giải:

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2020}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{4}A = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} - \dots + \frac{1}{2^{2020}} - \frac{1}{2^{2022}}$$

$$\Rightarrow A + \frac{1}{4}A = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2022}} < \frac{1}{4}$$

$$\frac{5A}{4} < \frac{1}{4} \Rightarrow A < \frac{1}{5} = 0,2$$

Bài 23: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$ thì $\frac{1}{4} < A < \frac{4}{9}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{5.5} + \dots + \frac{1}{50.50} > \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{50.51} = \frac{1}{3} - \frac{1}{51} = \frac{48}{153} > \frac{48}{192} = \frac{1}{4}$$

Mặt khác:

$$A = \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{5.5} + \dots + \frac{1}{50.50} < \frac{1}{9} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{49.50} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{50} = \frac{191}{450} < \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{4} < A < \frac{4}{9}$$

Bài 24: Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$, chứng tỏ rằng: $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$

Lời giải:

$$\text{Ta có } A = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$$

$$A = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{75} \right) + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{77} + \dots + \frac{1}{100} \right)$$

$$\text{TH1: } A > \frac{1}{75} \cdot 25 + \frac{1}{100} \cdot 25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\text{TH2: } A < \frac{1}{50} \cdot 25 + \frac{1}{75} \cdot 25 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Dạng 2: TỔNG PHÂN SỐ TỰ NHIÊN**I. Phương pháp giải.**

Với tổng phân số tự nhiên, với chương trình lớp 6 ta nên cho học sinh làm theo cách nhóm đầu cuối và so sánh giữa các nhóm với nhau, để tạo ra các ngoặc có cùng tử, rồi so sánh bình thường.

II. Bài toán.

Bài 1: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} + \frac{1}{144} + \frac{1}{196} < \frac{1}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} + \frac{1}{144} + \frac{1}{196}$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{14^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{7^2} \right) \\
 &< \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{6.7} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{28} < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} + \frac{1}{144} + \frac{1}{196} < \frac{1}{2}$$

Bài 2: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \frac{1}{41} + \frac{1}{61} + \frac{1}{85} + \frac{1}{113} < \frac{1}{2}$

Lời giải:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \frac{1}{41} + \frac{1}{61} + \frac{1}{85} + \frac{1}{113} < \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

Bài 3: Cho $A = \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{11}{15} < A < \frac{3}{2}$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} = \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right)$$

$$< \underbrace{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{20}}_{20 \text{ số hạng}} + \underbrace{\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}}_{20 \text{ số hạng}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} = \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right)$$

$$> \underbrace{\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}}_{20 \text{ số hạng}} + \underbrace{\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}}_{20 \text{ số hạng}} = 20 \cdot \frac{1}{40} + 20 \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = \frac{25}{30} > \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

$$\text{Vậy } \frac{11}{15} < \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} < \frac{3}{2}$$

Bài 4: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải:

Nhóm thành 2 ngoặc. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{80} \right) \\ &\Rightarrow VT > \left(\underbrace{\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}}_{20 \text{ số hạng}} \right) + \left(\underbrace{\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80}}_{20 \text{ số hạng}} \right) \\ &= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Bài 5: So sánh A và B biết: $A = \frac{2018}{2019} + \frac{2019}{2020} + \frac{2020}{2018}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

Lời giải:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{1}{2019} \right) + \left(1 - \frac{1}{2020} \right) + \left(1 + \frac{2}{2018} \right) \\ &= 3 + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \right) + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2020} \right) > 3 \\ B &= \left(\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{17} \right) < \frac{5}{3} + \frac{5}{8} + \frac{5}{10} < 3 \end{aligned}$$

Vậy $A > B$

Bài 6: Cho $M = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{17}$, chứng tỏ rằng: $M < 2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} < \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$$

$$\text{và } \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{17} < \frac{1}{8} \cdot 8 = 1$$

Vậy $M < 2$

Bài 7: Cho $S = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} + \frac{3}{13} + \frac{3}{14}$. Chứng tỏ rằng: $1 < S < 2$.

Lời giải:

$$S = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} + \frac{3}{13} + \frac{3}{14} > \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} = \frac{15}{15} = 1.$$

Suy ra $S > 1$.

$$S = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} + \frac{3}{13} + \frac{3}{14} < \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{15}{10} = 1,5 < 2.$$

Suy ra $S < 2$.

Vậy $1 < S < 2$.

Bài 8: Cho $S = \frac{5}{20} + \frac{5}{21} + \frac{5}{22} + \dots + \frac{5}{49}$. Chứng tỏ rằng: $3 < S < 8$.

Lời giải:

Tổng trên có 30 số hạng:

$$\text{Ta có: } S > \frac{5}{50} + \frac{5}{50} + \dots + \frac{5}{50} = 30 \cdot \frac{5}{50} = 3$$

Suy ra $S > 3$.

$$\text{Ngược lại: } S < \frac{5}{20} + \frac{5}{20} + \frac{5}{20} + \dots + \frac{5}{20} = 30 \cdot \frac{5}{20}.$$

Suy ra $S < 8$.

Bài 9: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$ thì $\frac{5}{8} < A < \frac{3}{4}$

Lời giải:

Ta thấy tổng A có 100 số, như vậy ta sẽ nhóm thành 50 ngoặc, mỗi ngoặc sẽ có hai phân số, gồm một phân số đứng đầu và một phân số đứng cuối, cứ như vậy dồn sâu vào trong tổng.

$$A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{200} \right) + \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{199} \right) + \dots + \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{151} \right) = \frac{301}{101 \cdot 200} + \frac{301}{102 \cdot 199} + \dots + \frac{301}{150 \cdot 151} \quad (50 \text{ ngoặc})$$

$$A = 301 \left(\frac{1}{101 \cdot 200} + \frac{1}{102 \cdot 199} + \dots + \frac{1}{150 \cdot 151} \right), \text{ lúc này ta sẽ so sánh tất cả với chung một phân số đầu}$$

hoặc cuối,

TH1: Ta chứng minh $A > \frac{5}{8}$ thì ta có:

$$A > 301 \cdot \left(\frac{1}{150.151} + \frac{1}{150.151} + \dots + \frac{1}{150.151} \right) = 301 \cdot \frac{50}{150.151} = \frac{301}{453} > \frac{300}{453} > \frac{300}{480} = \frac{5}{8} \quad (1)$$

TH2: Ta chứng minh $A < \frac{3}{4}$ ta có:

$$A < 301 \cdot \left(\frac{1}{101.200} + \frac{1}{101.200} + \dots + \frac{1}{101.200} \right) = 301 \cdot \frac{50}{101.200} = \frac{301}{404} < \frac{303}{404} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{5}{8} < A < \frac{3}{4}$.

Bài 10: Chứng tỏ rằng: $\frac{7}{12} < \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$

Lời giải:

Nhận thấy tổng $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}$ chính là tổng bài 9

Nên ta chứng minh được $A > \frac{5}{8}$, mà $\frac{5}{8} > \frac{7}{12} \Rightarrow A > \frac{7}{12}$.

Bài 11: Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$.

Lời giải:

Thấy rằng tổng A có 60 số hạng

TH1: Ta chứng minh $A > \frac{4}{3}$ bằng cách nhóm hai số một ngoặc thông thường

Ta có: $A = \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{70} \right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{69} \right) + \dots + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{41} \right) = \frac{81}{11.70} + \frac{81}{12.69} + \dots + \frac{81}{40.41}$ (30 ngoặc)

$$A > \frac{81}{40.41} + \frac{81}{40.41} + \dots + \frac{81}{40.41} = \frac{81.30}{40.41} = \frac{243}{164} > \frac{240}{164} > \frac{240}{180} = \frac{4}{3}$$

TH2: Tuy nhiên để chứng minh $A < \frac{5}{2}$, nếu chúng ta làm như trên thì sẽ không chứng minh được

Lý do: vì việc chứng minh nhỏ hơn mà chúng ta so sánh lớn hơn lượng dư thừa, dẫn đến tổng A lớn hơn $\frac{5}{2}$, do đó để giảm bớt lượng dư, tùy vào bài toán, chúng ta nên nhóm thành 6 ngoặc.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{20} \right) + \left(\frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{70} \right) \\
 A &< \underbrace{\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11} \right)}_{10 \text{ số hạng}} + \underbrace{\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{21} \right)}_{10 \text{ số hạng}} + \underbrace{\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{31} \right)}_{10 \text{ số hạng}} \\
 &+ \underbrace{\left(\frac{1}{41} + \frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{41} \right)}_{10 \text{ số hạng}} + \underbrace{\left(\frac{1}{51} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{51} \right)}_{10 \text{ số hạng}} + \underbrace{\left(\frac{1}{61} + \frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{61} \right)}_{10 \text{ số hạng}} \\
 A &< \frac{10}{11} + \frac{10}{21} + \frac{10}{31} + \frac{10}{41} + \frac{10}{51} + \frac{10}{61} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) < 2 + 0,5 = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

Bài 12: Cho $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$

Lời giải:

Nhóm tổng S thành ba ngoặc làm tương tự bài 11 ta có

$$\begin{aligned}
 S &= \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{60} \right) \\
 &< \frac{10}{31} + \frac{10}{41} + \frac{10}{51} < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} > \frac{3}{5}$$

$$\text{Suy ra } \frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}.$$

Bài 13: Cho $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99}$. Chứng tỏ rằng: $0,2 < A < 0,4$

Lời giải:

Tách tổng A thành:

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} \right) = \frac{13}{60} + \dots > \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$\text{Và: } A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) - \dots - \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{98} \right) - \frac{1}{99} < \frac{2}{5} = 0,4$$

Bài 14: Chứng tỏ rằng: $\frac{3}{5} < \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \dots + \frac{1}{4006} < \frac{3}{4}$

Lời giải:

Thấy rằng tổng A có 2003 số hạng, số hạng ở giữa là $\frac{1}{3005}$

$$\text{TH1: } A = \left(\frac{1}{2004} + \frac{1}{4006} \right) + \left(\frac{1}{2005} + \frac{1}{4005} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3004} + \frac{1}{3006} \right) + \frac{1}{3005}$$

$$= 6010 \left(\frac{1}{2004 \cdot 4006} + \frac{1}{2005 \cdot 4005} + \dots + \frac{1}{3004 \cdot 3006} \right) + \frac{1}{3005}$$

$$A > 6010 \cdot \frac{1}{3004 \cdot 3006} \cdot 1001 + \frac{1}{3005} > \frac{6010 \cdot 1001}{3005 \cdot 3005} + \frac{1}{3005} > \frac{2002}{3005} > \frac{1803}{3005} = \frac{3}{5}$$

$$\text{TH2: } A < 6010 \cdot \frac{1}{2004 \cdot 4006} \cdot 1001 + \frac{1}{3005} = \frac{6012 \cdot 1001}{2004 \cdot 4006} = \frac{3003}{4006} < \frac{3003}{4004} = \frac{3}{4}$$

Bài 15: Cho $A = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{3}{5} < A < \frac{31}{40}$

Lời giải:

Tổng A có 50 số hạng

$$\text{Ta có: } A = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{99} \right) + \dots + \left(\frac{1}{75} + \frac{1}{76} \right) \quad (25 \text{ ngoặc})$$

$$= 151 \left(\frac{1}{51 \cdot 100} + \frac{1}{52 \cdot 99} + \dots + \frac{1}{75 \cdot 76} \right)$$

$$A < \frac{151 \cdot 25}{51 \cdot 100} = \frac{151}{204} < \frac{155}{204} < \frac{155}{200} = \frac{31}{40} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } A > 151 \cdot \frac{25}{75 \cdot 76} = \frac{151}{228} > \frac{150}{228} > \frac{150}{250} = \frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{3}{5} < A < \frac{31}{40}$$

Bài 16: Cho $A = \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{80}$. Chứng tỏ rằng: $1 < A < 2$.

Lời giải:

$$\text{Tổng } A \text{ có 60 số hạng: } A = \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{80} \right) + \left(\frac{1}{22} + \frac{1}{79} \right) + \dots + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{51} \right) \quad (30 \text{ ngoặc})$$

$$A = 101 \left(\frac{1}{21 \cdot 80} + \frac{1}{22 \cdot 79} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 51} \right) < 101 \cdot \frac{30}{21 \cdot 80} = \frac{303}{168} = \frac{101}{56} < \frac{112}{56} = 2$$

Mặt khác: $A > 101 \cdot \frac{30}{50 \cdot 51} = \frac{303}{255} > 1$

Suy ra $1 < A < 2$

Bài 17: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500} > 48$

Lời giải:

Nhận thấy các mẫu của tổng A là bình phương của các số tự nhiên liên tiếp, còn tử số kém mẫu số là 1 nên ta tách A như sau:

$$A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2500}\right) = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right)$$

Mà $B = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) < 1$.

$$\Rightarrow -B > -1 \Rightarrow A = 49 - B > 49 - 1 = 48.$$

Vậy $A > 48$.

Bài 18: Chứng tỏ rằng: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2020} - 1} > 1010$

Lời giải:

Nhận thấy tổng A có phân số cuối có dạng $\frac{1}{2^n}$, nên muốn chứng minh tổng A lớn hơn 1 số ta nhóm sao cho phân số có dạng $\frac{1}{2^n}$ ở cuối ngoặc:

$$\text{Ta có: } A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2019} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{2020}}\right) - \frac{1}{2^{2020}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2020}} + \dots + \frac{1}{2^{2020}}\right) - \frac{1}{2^{2020}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2019} \cdot \frac{1}{2^{2020}} - \frac{1}{2^{2020}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2020}} = 1 + 2020 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2020}} = \frac{2020}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{2020}}\right) > 1010$$

Bài 19: Cho: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1}$. Chứng tỏ rằng: $A > 50$ và $A < 100$

Lời giải:

Nhận thấy tổng A giống với bài 10, muốn chứng minh lớn hơn ta để phân số dạng $\frac{1}{2^n}$ ở cuối ngoặc:

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}+1} + \dots + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}} \\ A &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{100}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{100}} = \frac{100}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right) > 50 \end{aligned}$$

Mặt khác muốn chứng minh $A < 100$, ta nhóm sao cho phân số có dạng $\frac{1}{2^n}$ nằm ở đầu ngoặc:

$$\begin{aligned} A &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}-1}\right) \\ A &< 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{99}} \\ &= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 100 \end{aligned}$$

Vậy $A < 100$

Lời giải:

Chứng tỏ rằng: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64} > 4$

Lời giải:

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^5+1} + \dots + \frac{1}{2^6}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^5 \cdot \frac{1}{2^6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 4 \end{aligned}$$

Bài 21: Cho $A = \frac{455}{1} + \frac{454}{2} + \frac{453}{3} + \dots + \frac{2}{454} + \frac{1}{455}$. So sánh A với 2007

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(\frac{454}{2} + 1\right) + \left(\frac{453}{3} + 1\right) + \dots + \left(\frac{1}{455} + 1\right) + 1 \\ &= \frac{456}{2} + \frac{456}{3} + \dots + \frac{456}{455} + \frac{456}{456} = 456 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{456}\right) = 456.B \end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{456} \\
 &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^7+1} + \dots + \frac{1}{2^8} \right) + \left(\frac{1}{257} + \frac{1}{258} + \dots + \frac{1}{456} \right) \\
 &> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^8} \right) + \left(\frac{1}{456} + \dots + \frac{1}{456} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \dots + \frac{2^7}{2^8} + \frac{200}{456} \\
 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \right) + \frac{200}{456} \\
 &= 4 + \frac{200}{456} = \frac{2024}{456}
 \end{aligned}$$

Khi đó: $A > 456 \cdot \frac{2024}{456} = 2024 > 2007$

Bài 22: Chứng tỏ rằng luôn tồn tại số tự nhiên n để: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 1000$

Lời giải:

Chọn $n = 2^{2000}$ Khi đó: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{2000}} > \frac{2000}{2} = 1000$

Bài 23: Cho $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$. So sánh B với 50.

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 B &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{98}+1} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \right) \\
 &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^{98} \cdot \frac{1}{2^{99}} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{99}{2} > 50
 \end{aligned}$$

Bài 24: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1$.

Lời giải:

$$A = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right).$$

Ta có $n^2 - (n+1) + 1 = n^2 - n$ số hạng do đó:

$$A > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{1}{n} + 1 - \frac{n}{n^2} = 1.$$

Vậy $A > 1$.

Bài 25: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{144} > 1$.

Lời giải:

Tổng này là một trường hợp của Bài 15: Áp dụng cách làm Bài 15 ta có:

$$A = \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{12^2} \right) > \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{12^2} = \frac{1}{12} + \frac{12^2 - 12}{12^2} = 1$$

Bài 26: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{36} > 1$

Lời giải:

Tương tự tổng này có dạng của bài 15, nên ta có:

$$A = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{6^2} \right) > \frac{1}{6} + \frac{6^2 - 6}{6^2} = 1 \Rightarrow A > 1$$

Dạng 3: TÍCH CỦA MỘT DÃY

I. Phương pháp giải.

Với dạng tích ta sử dụng tính chất: $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ với $m > 0$ và ngược lại

II. Bài toán.

Bài 1: Cho $A = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \dots \frac{200}{199}$. Chứng tỏ rằng: $14 < A < 20$

Lời giải:

Ta thấy: Phân số $\frac{n+1}{n} > 1 \Rightarrow \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$ nên ta có:

$$A > \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \dots \frac{201}{200} \text{ khi đó:}$$

$$A^2 > \frac{(2.4.6 \dots 200)(3.5.7 \dots 201)}{(1.3.5 \dots 199)(2.4.6 \dots 200)}$$

$$\Rightarrow A^2 > 201 > 196 = 14^2 \Rightarrow A > 14$$

Mặt khác: $\frac{n+1}{n} < \frac{n}{n-1}$ nên ta có:

$$A < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \dots \frac{199}{198} \text{ khi đó:}$$

$$A^2 < \frac{(2.4.6\dots 200)(2.3.5.7\dots 199)}{(1.2.4.6\dots 198)(1.3.5.7\dots 199)}$$

$$\Rightarrow A^2 < 200.2 = 20^2 \Rightarrow A < 20.$$

Bài 2: Cho $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{208}{210}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{25}$

Lời giải:

Ta thấy A có dạng $\frac{n}{n+2} < 1 \Rightarrow \frac{n}{n+2} < \frac{n-1}{n+1} < \frac{n-1}{n}$,

$$A < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{207}{208} \Rightarrow A^2 < \frac{(1.4.7.10\dots 208)(1.3.6\dots 207)}{(3.6.9\dots 210)(3.4.7\dots 208)}$$

$$\Rightarrow A^2 < \frac{1}{3.210} = \frac{1}{630} < \frac{1}{625} \Rightarrow A < \frac{1}{25}$$

Bài 3: Cho $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{15} < A < \frac{1}{10}$

Lời giải:

A có dạng $\frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$ khi đó ta có:

$$A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{100}{101} \text{ khi đó:}$$

$$A^2 < \frac{(1.3.5\dots 99)(2.4.6\dots 100)}{(2.4.6\dots 100)(3.5.7\dots 101)} \Rightarrow A^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \Rightarrow A < \frac{1}{10}$$

Mặt khác:

$$A > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{98}{99} \Rightarrow A^2 > \frac{(1.3.5\dots 99)(1.2.4\dots 98)}{(2.4.6\dots 100)(2.3.5.7\dots 99)} = \frac{1}{200}$$

$$\Rightarrow A^2 > \frac{1}{200} > \frac{1}{225} = \frac{1}{15^2} \Rightarrow A > \frac{1}{15}$$

Bài 4: Chứng minh rằng $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{244}{246} < \frac{1}{27}$

Lời giải:

$$A < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \dots \frac{243}{244}$$

$$\Rightarrow A^2 < \frac{(1.4.7\dots 244)(1.3.6\dots 243)}{(3.6.9\dots 246)(3.4.7\dots 244)}$$

$$\Rightarrow A^2 < \frac{1}{3.246} = \frac{1}{738} < \frac{1}{27^2}$$

$$\text{Suy ra } A < \frac{1}{27}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{1}{27}.$$

Bài 5: Chứng tỏ rằng: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{199}{200}$. Chứng minh rằng $P^2 < \frac{1}{201}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } P < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{200}{201}$$

$$\Rightarrow P^2 < \frac{(1.3.5\dots 199)(2.4.6\dots 200)}{(2.4.6\dots 200)(3.5.7\dots 201)}$$

$$\Rightarrow P^2 < \frac{1}{201}.$$

$$\text{Vậy } P^2 < \frac{1}{201}.$$

Bài 6: Cho $S = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \dots \frac{200}{199}$. Chứng tỏ rằng: $101 < S^2 < 400$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } S < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{199}{198}$$

$$S^2 < \frac{(2.4.6\dots 200)(2.3.5\dots 199)}{(1.3.5.7\dots 199)(1.2.4.6\dots 198)} = 400$$

$$\text{Mặt khác: } S > \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \dots \frac{201}{200}$$

$$\Rightarrow S^2 > \frac{(2.4.6.....200)(3.5.7....201)}{(1.3.5.....199)(2.4.6....200)} = 201 > 101.$$

Vậy $101 < S^2 < 400$.

Bài 7: Cho $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$. So sánh A với $-\frac{1}{2}$

Lời giải:

Ta thấy tích A gồm 99 số âm:

$$A = \left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{9} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{10000} - 1\right).$$

$$= -\left(\frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \dots \frac{99.101}{100.100}\right) = \frac{-101}{200}.$$

$$\text{Mà: } \frac{101}{200} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-101}{200} < \frac{-1}{2}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{-1}{2}.$$

Dạng 4: BẤT ĐẲNG THỨC CHỮ

I. Phương pháp giải

Với chương trình lớp 6 các dạng bài toán chứng minh bất đẳng thức chữ, ta thường sử dụng tính

chất: $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}, m > 0$ hoặc ngược lại và đưa về cùng mẫu.

II. Bài toán

Bài 1: Cho $a, b, c > 0$, chứng tỏ rằng: $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ có giá trị không nguyên

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$$

$$\frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}$$

$$\frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$$

$$\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$$

$$\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}$$

$$\frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} < M < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c}, \text{ hay } 1 < M < 2,$$

Vậy M không có giá trị nguyên

Bài 2: Cho x, y, z, t là số tự nhiên khác 0, chứng minh rằng:

$$M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t} \text{ có giá trị không nguyên}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{x}{x+y+z} > \frac{x}{x+y+z+t}$$

$$\frac{y}{x+y+t} > \frac{y}{x+y+z+t}$$

$$\frac{z}{y+z+t} > \frac{z}{x+y+z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} > \frac{t}{x+y+z+t}$$

Cộng theo vế ta được: $M > 1$.

Mặt khác

$$\frac{x}{x+y+z} < \frac{x+t}{x+y+z+t}$$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y+z}{x+y+z+t}$$

$$\frac{z}{y+z+t} < \frac{z+x}{x+y+z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t+y}{x+y+z+t}$$

Cộng theo vế ta được: $M < 2$.

Suy ra $1 < M < 2$, Vậy M không có giá trị nguyên

Bài 3: Cho a, b, c là các số dương, và tổng hai số luôn lớn hơn số còn lại.

Chúng tỏ rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Lời giải:

Chúng ta có thể làm theo cách ở trên, hoặc làm theo cách thứ hai như sau:

Giả sử: $a \geq b \geq c \Rightarrow a+b > a+c > b+c$

Khi đó:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c}$$

$$\frac{b}{c+a} < \frac{b}{b+c}$$

$$\frac{c}{a+b} < \frac{c}{b+c}$$

Cộng theo vế ta được: $VT < \frac{a+b+c}{b+c} = 1 + \frac{a}{b+c} < 1+1=2$

Bài 4: Cho $a, b, c, d > 0$ và $A = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$, chứng tỏ rằng: $2 < A < 3$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} < \frac{b+c}{b+c+d} < \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c+d}{a+b+c+d} < \frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d+a}{a+b+c+d} < \frac{d+a}{a+b+d} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d}$$

Cộng theo vế ta được: $2 < A < 3$.

Bài 5: Cho các số x, y, z nguyên dương, chứng tỏ rằng: $1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$

Lời giải:

Ngoài hai cách như trên, ta cũng có thể hướng dẫn học sinh làm theo cách như sau:

Ta có: $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} > 1$, tương tự ta cũng có: $\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} > 1$

Mà $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \right) + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} \right) = 3$ Nên $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$

Bài 6: Cho các số x, y, z nguyên dương, chứng tỏ rằng: $1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} > 1$, tương tự ta cũng có: $\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} > 1$

Mà $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \right) + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} \right) = 3$ nên $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$

Vậy $1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$.

Bài 7: Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, chứng tỏ rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$.

Lời giải:

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a-1 \leq 0 \\ b-1 \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0$

$\Rightarrow ab - a - b + 1 \geq 0$

$\Rightarrow ab + 1 \geq a + b \Rightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}, (c \geq 0)$

Mà $\frac{c}{a+b} \leq \frac{2c}{a+b+c}, (c \geq 0) \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+c}$.

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{b}{ac+1} \leq \frac{2b}{a+b+c}$ và $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{2a}{a+b+c}$.

Cộng theo vế ta được: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2.$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Cho $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$, chứng tỏ rằng: $A < 2$.

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \dots + \frac{1}{50.50} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50} = 2 - \frac{1}{50} < 2$

Bài 2: Chứng tỏ rằng:

a, $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$

b, $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$

Lời giải:

a, Ta có: $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$

$\Rightarrow 2A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$

Nên $2A + A = 3A = 1 - \frac{1}{64} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{3}$

b, Ta có: $3A + A = 4A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \dots - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$

Đặt $B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \dots - \frac{1}{3^{99}} \Rightarrow B = \frac{3}{4} - \frac{1}{3.3^{99}}$, thay vào A ta được:

$4A = \frac{3}{4} - \frac{1}{3^{99}.4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4} \Rightarrow A < \frac{3}{16}$

Bài 3: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Lời giải:

Đặt $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$

$49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$

$$50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Bài 4: Chứng tỏ rằng: $1 < \frac{2021}{2020^2 + 1} + \frac{2021}{2020^2 + 2} + \frac{2021}{2020^2 + 3} + \dots + \frac{2021}{2020^2 + 2020} < 2$

Lời giải:

Ta có: $\frac{2021}{2020^2 + 1} < \frac{2021}{2020^2}$, $\frac{2021}{2020^2 + 2} < \frac{2021}{2020^2}$, tương tự như vậy:

$$A < \frac{2021}{2020^2} + \frac{2021}{2020^2} + \dots + \frac{2021}{2020^2} = \frac{2021 \cdot 2020}{2020^2} = \frac{2021}{2020} < 2 \Rightarrow A < 2$$

Mặt khác: $\frac{2021}{2020^2 + 1} > \frac{2021}{2020^2 + 2020}$, $\frac{2021}{2020^2 + 2} > \frac{2021}{2020^2 + 2020}$,

Tương tự như vậy:

$$A > \frac{2021}{2020^2 + 2020} + \frac{2021}{2020^2 + 2020} + \dots + \frac{2021}{2020^2 + 2020} = \frac{2021 \cdot 2020}{2020(2020 + 1)} = \frac{2021 \cdot 2020}{2020(2020 + 1)} = 1$$

Bài 5: Chứng tỏ rằng: $E = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500} > 48$

Lời giải:

$$\begin{aligned} E &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2500}\right) \\ &= 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) > 48 \end{aligned}$$

Bài 6: Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$, chứng tỏ rằng: $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$

Lời giải:

Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$

$$\text{Suy ra } A = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{75}\right) + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{77} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$\text{TH1: } A > \frac{1}{75} \cdot 25 + \frac{1}{100} \cdot 25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\text{TH2: } A < \frac{1}{50} \cdot 25 + \frac{1}{75} \cdot 25 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Bài 7: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{18.19.20} < \frac{1}{4}$

Lời giải:

$$2A = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{19.20} \right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4} - \frac{1}{19.40} < \frac{1}{4}$$

Bài 8: Chứng tỏ rằng: $D = \frac{36}{1.3.5} + \frac{36}{3.5.7} + \frac{36}{5.7.9} + \dots + \frac{36}{25.27.29} < 3$

Lời giải:

$$D = 9 \left(\frac{4}{1.3.5} + \frac{4}{3.5.7} + \frac{4}{5.7.9} + \dots + \frac{4}{25.27.29} \right) = 9 \left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{27.29} \right) = 3 - \frac{1}{3.29} < 3$$

Bài 9: Chứng tỏ rằng: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2021}} < 2021$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2020}} + \dots + \frac{1}{2^{2021} - 1} \right) + \frac{1}{2^{2021}}$$

$$A < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2020} \cdot \frac{1}{2^{2020}} + \frac{1}{2^{2021}}$$

$$< 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \frac{1}{2^{2021}} = 2020 + \frac{1}{2^{2021}} < 2021$$

Bài 10: Chứng tỏ rằng: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{1999}} > 1000$

Lời giải:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{1998} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{1999}} \right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{1998} \cdot \frac{1}{2^{1999}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1999 > 1000$$

Bài 11: Cho $M = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2}$. So sánh M với $\frac{2020}{2021}$

Lời giải:

Ta có :

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2.2} < \frac{1}{1.2}$$

$$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{3.3} < \frac{1}{2.3}$$

$$\frac{1}{4^2} = \frac{1}{4.4} < \frac{1}{3.4}$$

...

$$\frac{1}{2021^2} = \frac{1}{2021.2021} < \frac{1}{2020.2021}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2020.2021}$$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}$$

$$M < 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

$$\text{Vậy } M < \frac{2020}{2021}$$

Bài 12: Cho $A = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{2021}$, $B = 20$. So sánh A và B.

Lời giải:

Ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \\ \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \\ \frac{1}{102} < \frac{1}{100} \\ \dots \\ \frac{1}{2021} < \frac{1}{100} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{2021}}_{1922 \text{ số hạng}} < \underbrace{\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100}}_{1922 \text{ số hạng}}$$

$$\Rightarrow A < 1922 \cdot \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1922}{100} < \frac{2000}{100} = 20$$

$$\Rightarrow A < B$$

Vậy $A < B$.

Bài 13: Chứng tỏ rằng: $S = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{2001!} < 3$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{1}{1!} = 1$$

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{1.2.3.4} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

...

$$\frac{1}{2001!} = \frac{1}{1.2.3 \dots 2000.2001} < \frac{1}{2000.2001} = \frac{1}{2000} - \frac{1}{2001}$$

$$\text{Suy ra } S < 1 + 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2000} - \frac{1}{2001}$$

$$\Rightarrow S < 3 - \frac{1}{2001} < 3$$

$$\Rightarrow S < 3 \text{ (đpcm)}$$

Bài 14: Chứng minh rằng: $D = \frac{4}{5.8.11} + \frac{4}{8.11.14} + \frac{4}{11.14.17} + \dots + \frac{4}{302.305.308} < \frac{1}{60}$

Lời giải:

Ta có:

$$D = \frac{4}{5.8.11} + \frac{4}{8.11.14} + \frac{4}{11.14.17} + \dots + \frac{4}{302.305.308}$$

$$\frac{3}{2}D = \frac{6}{5.8.11} + \frac{6}{8.11.14} + \frac{6}{11.14.17} + \dots + \frac{6}{302.305.308}$$

$$\frac{3}{2}D = \frac{11-5}{5.8.11} + \frac{14-8}{8.11.14} + \frac{17-11}{11.14.17} + \dots + \frac{308-302}{302.305.308}$$

$$\frac{3}{2}D = \frac{1}{5.8} - \frac{1}{8.11} + \frac{1}{8.11} - \frac{1}{11.14} + \dots + \frac{1}{302.305} - \frac{1}{305.308}$$

$$\frac{3}{2}D = \frac{1}{5.8} - \frac{1}{305.308}$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{60} - \frac{2}{3.305.308}$$

$$\text{Do } \frac{2}{3.305.308} > 0 \Rightarrow D < \frac{1}{60}$$

$$\text{Vậy } D < \frac{1}{60}$$

Bài 15: Cho $a, b, c, d > 0$ và $A = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b}$. Chứng tỏ A không là một số tự nhiên

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b}{b+c+d} > \frac{b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c}{c+d+a} > \frac{c}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d}{d+a+b} > \frac{d}{a+b+c+d}$$

Cộng vế theo vế ta được $A > 1$

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c}{c+d+a} > \frac{c+b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$$

Cộng vế theo vế ta được $A < 2$

Suy ra $1 < A < 2$. Chứng tỏ A không là một số tự nhiên.

∞ HẾT ∞